Master de Mathématiques d'Ho-Chi-Min Ville
Fonctions harmoniques dans des ouverts lipchitziens et mesure harmonique
Thème présenté par Laurent Véron, Professeur

Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique-CNRS UMR 6083
Fédération Denis Poisson
Université François Rabelais-Tours

L'étude des fonctions harmoniques dans des ouverts lischitziens est fondamentale dans nombre d'applications de l'analyse harmonique aux équations aux dérivées partielles ou aux probabilités. Si D est un domaine borné lipschitzien (un ouvert de Wiener suffit), et ϕ une fonction continue sur son bord ∂D le problème de Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{rl} -\Delta u = 0 & \text{dans } D \\ u = \phi & \text{sur } \partial D \end{array} \right.$$

admet une solution unique $u \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$. L'application $T : \phi \mapsto u$ est linéaire et continue pour la convergence uniforme de $C(\partial D)$ dans $C(\bar{D})$, ce par le principe du maximum. Si $x_0 \in \Omega$, $\phi \mapsto u(x_0) = T[\phi](x_0)$ est une forme linéaire continue sur $C(\partial D)$ à la quelle correspond une unique mesure de Borel régulière positive ω^{x_0} sur $\partial\Omega$ telle que

$$T[\phi](x_0) = \int_{\partial D} \phi(y) d\omega^{x_0}(y).$$

La mesure ω^{x_0} est appelée la mesure harmonique de D en x_0. Les propriétés de la mesure harmonique sont nombreuses et permettent d'obtenir un théorème général de représentation des fonctions harmoniques positives dans D et de trace au bord dans les mesures de Borel régulięres positives sur ∂D.

Le contenu du stage est de lire les deux travaux suivants, de les comprendre et de faire le lien entre eux :

1- R. Hunt and R. Wheeden : Positive harmonic functions on Lipschitz domains. **Transactions of Amer. Math. Soc. 147**, 507-527 (1970).

2- L. Caffarelli, E. Fabes, S. Mortola and S. Salsa : Boundary behavior of nonnegative solutions of elliptic operators in divergence form. **Indiana Univ. Math. J. 30**, 621-640 (1981).

Et pour aller plus loin,

3- D. Jerison and C. Kenig : Boundary value problems on Lipschitz domains. **MAA Stud. Math. 23**, 1-68 (1982).

Pour les probabilistes (ce n'est pas mon cas), signalons l'article suivant qui contient des estimations analytiques intéressantes,

4- C. Kenig and J. Pipher : The h-path distributions of the life time of conditioned Brownian motion for non-smooth domains. **Proba. Th. Rel. Fields 82**, 615-623 (1989).