MÔ HÌNH HÓA GIẢI TÍCH SỐ

Tóm lược bài giảng của GS. Alain Phạm Ngọc Định

BÀI TOÁN DỪNG ĐÀN HỒI TUYẾN TÍNH

I. Bài toán

Cho Ω bị chặn, mở trong $R^3, \Gamma = \partial\Omega$. Gọi $f = (f_1, f_2, f_3)$ là lực thể tích trên Ω. Ta tìm $u(x) = (u_1, u_2, u_3)$, $x \in \Omega$, là sự dời chỗ thỏa

$$\sum_{j=1,2,3} \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij} u) + f_i = 0, \tag{1}$$

trong đó

• σ_{ij} là luật dời chỗ cho bởi

$$\sigma_{ij} = \sum_{h,k=1,2,3} a_{ijhk}\epsilon_{hk}(u), \qquad \epsilon_{hk}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k}\right),$$

với $a_{ijhk} = a_{jihk} = a_{khij} \in L^\infty(\Omega)$, và thỏa điều kiện kháng từ

$$\exists \alpha > 0, \sum_{i,j=1,2,3} \epsilon_{ij}\sigma_{ij} \geq \alpha \sum_{i,j=1,2,3} |\epsilon_{ij}|^2,$$

hay

$$\sum_{i,j,h,k=1,2,3} a_{ijhk}\epsilon_{ij}\epsilon_{hk} \geq \alpha \sum_{i,j=1,2,3} |\epsilon_{ij}|^2.$$

• Điều kiện biên

$$\begin{cases} u_i = U_i, \text{ on } \Gamma_1, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(u) n_j = F_i, \text{ on } \Gamma_2, \end{cases} \tag{2}$$

trong đó $\overrightarrow{n}$ là pháp tuyến ngoài và $F = (F_i)$ là ứng suất.

Trong trường hợp không chia biên thì điều kiện biên là $\sum_{j=1,2,3} \sigma_{ij}(u) n_j = F_i$ trên Γ.

II. Lập công thức biến phân

Công thức Green. Ta đặt

$$
\begin{aligned}
(Au)_i &= -\sum_{j=1,2,3} \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}(u)),\\
a(u,v) &= \sum_{i,j=1,2,3} \int_\Omega \sigma_{ij}(u)\epsilon_{ij}(v)dx.
\end{aligned}
$$

Khi $(u,v) \in (D(\overline{\Omega}))^3$ thì

$$
\begin{aligned}
a(u,v) &= \sum_{i,j=1,2,3} \int_\Omega \sigma_{ij}(u)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx\\
&= -\sum_{i,j=1,2,3} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(u)v_i dx + \sum_{i,j=1,2,3} \int_\Gamma \sigma_{ij}(u)v_i n_j d\delta.
\end{aligned}
$$

Bổ đề 1. Khi $(u,v) \in (D(\overline{\Omega}))^3$ ta có

$$
\begin{aligned}
a(u,v) &= (Au,v) + \sum_{i,j=1,2,3} \int_\Gamma \sigma_{ij}(u)v_i n_j d\delta,\\
(Au,v) &= \sum_{i=1,2,3} \int_\Omega (Au)_i v_i dx.
\end{aligned}
$$

Bổ đề 2. Cho $u \in (D(\Omega))^3, v \in (H^1(\Omega))^3$. Thì $\sum_j \sigma_{ij} n_j \in (H^{-1/2}(\Gamma))^3$, trong đó $H^{-1/2}(\Gamma)$ là không gian đối ngẫu của $H^{1/2}(\Gamma) = \gamma_0(H^1(\Omega))$, với γ_0 là ánh xạ vết.

Bổ đề 3. Cho $u, v \in (H^1(\Omega))^3$. Nếu

$$
\sum_{j=1,2,3} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)
$$

thì $\sum\limits_{j=1,2,3} \sigma_{ij}(u)n_j \in (H^{-1/2}(\Omega))^3$ và ta có công thức Green tổng quát

$$
\begin{aligned}
a(u,v) &= \sum_{i,j=1,2,3} \sigma_{ij}(u)\epsilon_{ij}(v)\\
&= < Au, v > + \sum_i < \sum_j \sigma_{ij} n_j, \gamma_0 v_i >_{H^{-1/2}, H^{1/2}} .
\end{aligned}
$$

III. Lập công thức biến phân của bài toán (1)-(2)

Nhân $(v_i - u_i)$ vào (1) và lấy tích phân từng phần, ta có

$$
-\sum_{i,j=1,2,3} \sigma_{ij}(u)\frac{\partial(v_i - u_i)}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1,2,3} \int_\Gamma \sigma_{ij}(v_i - u_i)n_j + \sum_i \int_\Omega f_i(v_i - u_i) = 0
$$

Giả sử $u_i = v_i$ trên Γ_1 thì

$$a(u, v-u) = \sum_i \int_\Omega f_i(v_i - u_i)dx + \sum_i \int_{\Gamma_2} F_i(v_i - u_i)dx.$$

Khung cảnh phiếm hàm

Ta giả sử $F = (F_i) \in (L^2(\Gamma_2))^3$ và đặt

$$\begin{aligned} U_{ad} &= \{u \in V | u_i = U_i(\Gamma_1)\}, \\ (u, v)_1 &= \sum_i \int_\Omega u_i v_i dx + \sum_{i,j} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx. \end{aligned}$$

Bổ đề 4. U_{ad} lồi, đóng trong $V = (H^1(\Omega))^3$.
Mục đích. Ta cần tìm $u \in U_{ad}$ sao cho

$$a(u, v-u) = \langle f, v-u \rangle + \sum_i \int\limits_{\Gamma_2} F_i(v_i - u_i). \tag{3}$$

Ta dễ dàng chứng minh bài toán (3) tương đương với bài toán cực tiểu

$$\inf_{u \in U_{ad}} J(u) \tag{4}$$

với

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - \langle f, u \rangle - \sum_i \int\limits_{\Gamma_2} F_i u_i.$$

Hơn nữa, ta có
Định lý. Bài toán (3) hay (4) tương đương với bài toán (1)-(2).

Để chứng minh bài toán (3) hay (4) có nghiệm duy nhất, điều quan trọng là chứng minh tính kháng từ của toán tử a.

IV. Bất dẳng thức Korn

Với $v \in V$, đặt

$$|||v||| = (\sum_{i,j} \int_\Omega |\epsilon_{i,j}(v)|^2 + \sum_i \int_\Omega |v_i|^2)^{1/2}.$$

Ta có
Bất đẳng thức Korn Tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho

$$|||v|||^2 \geq c^2 ||v||_V^2, \qquad \forall v \in V.$$

Điều này tương đương với
Định lý. Chuẩn $|||.|||$ tương đương với chuẩn thông thường trên V. Từ đó, ta dễ dàng chứng minh kết quả sau

Bổ đề. Ánh xạ $u \to \sqrt[2]{a(u,u)}$ lồi ngặt trên U_{ad}.
Định lý. Tồn tại $c_1, c_2 > 0$ sao cho

$$a(v,v) \geq c_1 ||v||_V^2 - c_2, \qquad v \in V.$$

Từ đó ta có ngay
Bổ đề 5. Phiếm hàm

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v), \qquad \forall v \in U_{ad},$$

thỏa mãn

$$\lim_{||v||_V \to \infty} J(v) = +\infty,$$

tức J kháng từ.

V. Giải bài toán (1)-(2)

Nhắc lại là bài toán (1)-(2) tương đương với bài toán (3) hay bài toán cực tiểu hóa (4). Xem (1)-(2) như là (3), ta có
Định lý 6. Bài toán (3) có một lời giải duy nhất $u \in U_{ad}$.
Xem (1)-(2) như là (4), ta sẽ lập công thức đối ngẫu của (4).
Lập công thức đối ngẫu.
Vì

$$\sigma_{ij} = \sum_{h,k=1,2,3} a_{ijhk} \epsilon_{hk}(u)$$

với

$$\sum_{i,j=1,2,3} \epsilon_{ij} \sigma_{ij} \geq \alpha \sum_{i,j=1,2,3} |\epsilon_{ij}|^2$$

hay

$$\sum_{i,j,h,k=1,2,3} a_{ijhk} \epsilon_{ij} \epsilon_{hk} \geq \alpha \sum_{i,j=1,2,3} |\epsilon_{ij}|^2.$$

Chú ý là nếu A là ma trận đối xứng và xác định dương thì A khả nghịch. Do đó ta có thể tính

$$\epsilon_{hk} = \sum_{i,j=1,2,3} A_{ijhk} \sigma_{ij}(u).$$

Từ đó ta có thể viết bài toán đối ngẫu, trong đó các hệ số A_{ijhk} thỏa mãn tính chất đối xứng, kháng từ, và đều, giống như a_{ijhk}.
Định lý 7. Nếu u là lời giải của (1)-(2), thì $\sigma = (\sigma_{ij}(u))$ là lời giải duy nhất của phiếm hàm $L(\tau)$, trong đó

$$L(z) = \frac{1}{2} \sum_{ijhk} \int_\Omega A_{ijhk} \tau_{ij} \tau_{hk} - \sum_{ij} \int_{\Gamma_1} U_i \tau_{ij} n_j ds,$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2, \\ \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}) + f_i = 0, \\ \sum_j \tau_{ij} n_j = F_i, \text{ on } \Gamma_2. \end{cases}$$

Trong thực tế, thường ta sẽ giải bài toán đối ngẫu trước.

BÀI TOÁN MỘT PHÍA TRONG ĐÀN HỒI TUYẾN TÍNH

I. Bài toán

Ta cần xác định trường dời chỗ $u(x) = (u_i(x))$ trong một trường ràng buộc $(\sigma_{ij}(u))$ sao cho

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}(u)) + f_i = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{1}$$

trong đó

$$\sigma_{ij}(u) = \sum_{hk} a_{ijhk}\epsilon_{hk}(u), \qquad \epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$$

thỏa tính kháng từ (elliptic)

$$\sum_{ij} \sigma_{ij}(u)\epsilon_{ij}(u) \geq \alpha \sum_{ij} |\epsilon_{ij}(u)|^2,$$

và các điều kiện biên

$$\sigma_i := \sum_j \sigma_{ij} n_j = F_i \tag{2}$$

trên Γ_1 và

$$\begin{cases} \sigma_T = 0, & \Gamma_2, \\ u_N \leq 0, & \Gamma_2, \\ u_N = 0 \Rightarrow \sigma_N \leq 0, \\ u_N < 0 \Rightarrow \sigma_N = 0, \end{cases} \tag{3}$$

trên Γ_2, trong đó $u(x) = u_N \overrightarrow{n} + \overrightarrow{u_T}$.

Ta cũng giả thiết $f_i \in L^2(\Omega)$, $F_i \in L^2(\Gamma_1)$.

Ý nghĩa. Bài toán xét một cố thể nằm trên một giá đỡ, mà biên Γ có thể sứt tại điểm không biết. Bài toán này là một bài toán mở, ở đây mình xét trong 1 trường hợp đơn giản.

II. Lập công thức biến phân

1.Tính toán hình thức

Từ phương trình

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(u) + f_i = 0,$$

lấy tích phân từng phần ta có

$$-\sum_{ij}\int_\Omega \sigma_{ij}(u)\epsilon_{ij}(v-u)dx + \int_\Omega \sum f_i(v_i - u_i)dx + \int_\Gamma \sum_{ij}\sigma_{ij}(v_i-u_i)n_j ds = 0.$$

Đặt

$$a(u,v) = \sum_{ij}\int_\Omega \epsilon_{ij}(v)\sigma_{ij}(u)dx.$$

• Nếu u là lời giải của $(1)-(3)$ thì u thỏa

$$a(u, v-u) - \sum_i \int_\Omega f_i(v_i - u_i)dx - \sum_i \int_{\Gamma_1} F_i(v_i - u_i) = \int_{\Gamma_2} \sigma_N v_N ds$$

với mọi $v \in (H^1(\Omega))^3$.

• Ta sẽ tìm $u \in H^1$, $u_N \leq 0$ và

$$a(u, v-u) - \langle f, v-u\rangle - \langle F, v-u\rangle_{(L^2(\Gamma_1))^3} \geq 0$$

với mọi $v \in (H^1)^3, v_N \leq 0$ trên Γ_2

2. Lập công thức biến phân tương đương

Đặt $V = (H^1(\Omega))^3$, $\quad U_{ad} = \{v \in V : v_N \leq 0 \text{ trên } \Gamma_2\}$.

Bổ đề 1. U_{ad} là một hình nón lồi đóng chứa 0.

Bổ đề 2: Bài toán $(1)-(3)$ tương đương với bài toán dưới đây:

Tìm $u \in U_{ad}$ sao cho

$$a(u, v-u) - L(v-u) \geq 0, \qquad \forall v \in U_{ad}, \tag{4}$$

trong đó

$$L(v) = \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_1} Fv.$$

III. Giải.

Đặt

$$\widetilde{R} = \{v \in V | \varepsilon_{ij}(v) = 0, \forall i,j\},$$
$$R^* = \left\{p \in \widetilde{R} | p_N \leq 0 \text{ on } \Gamma_2\right\}.$$

Điều kiện cần để tồn tại nghiệm là

$$a(u,p) = 0, \langle f, p\rangle + \langle F, p\rangle_{\Gamma_1} \leq 0$$

với mọi $p \in R^*$.

Để chứng minh sự tồn tại nghiệm, mình áp dụng một định lý của Lions-Stampachia.

Cho không gian Hilbert $(V, ||.||)$, $||v|| = p_0(x) + p_1(x)$. Giả sử
- p_0 là chuẩn tiền Hilbert, p_1 là nửa chuẩn trên V.
- $Y = \{v \in V | p_1(v) = 0\}$ hữu hạn chiều.
- $\exists c_1 > 0, \quad \inf_{y \in Y} p_0(v + y) \leq c_1 p_1(v), \quad \forall v \in V.$
- $a(u, v)$ song tuyến tính, liên tục trên $V \times V$ và nửa liên tục dưới yếu, tức là

$$\exists c_2 > 0, \quad a(v, v) \geq c_2 p_1^2(v), \quad \forall v \in V.$$

- K lồi đóng trong V, chứa 0, và $f \in V'$ thỏa mãn

$$\langle f, y \rangle_{V',V} \leq 0, \qquad \forall y \in Y \cap (K \backslash \{0\}).$$

Thì tồn tại $u \in K$ là lời giải bài toán

$$a(u, v - u) - \langle f, v - u \rangle \geq 0, \qquad \forall v \in K.$$

IV. Tính duy nhất

Chúng ta có tính duy nhất theo nghĩa của trường biến dạng và trường ràng buộc, tức là trường dời chỗ u có thể chênh nhau bởi $\widetilde{R}$.

Định lý. Dưới giả thiết $f \in L^2(\Omega), F \in L^2(\Gamma_1)$ và

$$\langle f, p \rangle + \langle F, p \rangle \leq 0, \qquad \forall p \in R^*.$$

Thì bài toán biến phân (4)

$$a(u, v - u) - L(v - u) \geq 0, \qquad \forall v \in U_{ad}$$

có nghiệm duy nhất $u \in U_{ad}$ theo nghĩa chênh nhau $\widetilde{R}$.

BÀI TẬP

Cho Ω là tập mở, bị chặn trong R^n, biên Γ đều. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} -\mu \Delta \overrightarrow{u} - (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f} & \text{on } \Omega, \\ u|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{1}$$

với μ, λ là các hằng số dương.

Câu 1. Viết công thức biến phân cho bài toán (1). Chứng minh bài toán (1) tương đương với cực tiểu hóa của phiếm hàm

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\lambda \left(\text{div} v\right)^2 + 2\mu \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^2(v) \right) dx - \int_\Omega f v dx$$

với $v \in (H_0^1)^n$, trong đó
$$\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right).$$
Câu 2. Chứng minh
$$\sum_{ij} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^2(v) \geq C \sum_{ij} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2$$
với một hằng số C độc lập với $v \in (H_0^1)^n$. Từ đó suy ra tích vô hướng
$$\langle u, v\rangle = \sum_{ij} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)$$
xác định một chuẩn tương đương với chuẩn thông thường của $(H_0^1)^n$.

Áp dụng để chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán biến phân.

Câu 3. Đặt $\lambda = \frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$. Với mỗi ε, gọi u_ε là lời giải của bài toán tương ứng. Chứng minh rằng khi $\varepsilon \to 0^+$ thì $u_\varepsilon \to u$ (theo nghĩa thích hợp), trong đó u là lời giải bài toán
$$\begin{cases} -\mu\Delta\overrightarrow{u} - \overrightarrow{\text{grad}}(p) = \overrightarrow{f} \text{ on } \Omega, \\ u|_\Gamma = 0, \text{div} u = 0. \end{cases}$$

BÀI TOÁN NAVIER STOKES (N=2)

Cho $\Omega \subset R^2, \Gamma = \partial\Omega$ đều. Xét bài toán tìm (u, p) sao cho
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \displaystyle\sum_{i=1}^{2} u_i D_i u + \overrightarrow{\text{grad}} p = f \text{ in Q} = (0,\text{T}) \times \Omega, \\ \text{div } u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$
trong đó f, u_0 cho trước.

I. Sơ bộ

Kí hiệu. Đặt
$$\begin{aligned} &\gamma = \left\{\varphi \in (C_c^\infty)^2, \text{div}\varphi = 0\right\}, \\ &V = \overline{\gamma}_{(H_0^1)^2} = \left\{v \in (H_0^1)^2, divv = 0\right\}, \quad H = \overline{\gamma}_{(L^2)^2}, \\ &a(u,v) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} D_i u_j . D_i v_j dx = \sum_{j} \int_{\Omega} \nabla u_j . \nabla v_j dx, \\ &b(u,v,w) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j dx. \end{aligned}$$

Bổ đề 1. $(u, v, w) \mapsto b(u, v, w)$ là một dạng tam tuyến tính liên tục trên $(H_0^1)^3$.
Bổ đề 2. Với mọi $u, v \in V$ thì

$$\begin{cases} b(u, v, v) = 0, \\ b(u, v, u) = -b(u, u, v). \end{cases}$$

Định lý (Lions) (chấp nhận) Cho các không gian Banach $X_0 \subset X \subset X_1$ với các phép nhúng liên tục, trong đó X_0, X_1 phản xạ, $X_0 \subset X$ với phép nhúng compact. Cho các số thực dương T, α_0, α_1. Đặt

$$W = \left\{ v \in L^{\alpha_0}(0, T, X_0) | \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{\alpha_1}(0, T, X_1) \right\},$$
$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{\alpha_0}} + \|v\|_{L^{\alpha_1}}.$$

Thì W Banach và $W \subset L^{\alpha_0}(0, T, X_0)$ với phép nhúng compact.

II. Lập công thức biến phân

Xét $\varphi \in \gamma$, ta có

$$u_1' - \Delta u_1 + \sum_j u_i D_i u_1 + \frac{\partial p}{\partial x_1} = f_1$$

$$\Rightarrow \langle u_1', \varphi_1 \rangle_{L^2} - \langle \Delta u_1, \varphi_1 \rangle + \left\langle \sum_j u_i D_i u_1, \varphi_1 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_1}, \varphi_1 \right\rangle = \langle f_1, \varphi_1 \rangle$$

$$\Rightarrow \langle u_1', \varphi_1 \rangle_{L^2} + \langle \nabla u_1, \nabla \varphi_1 \rangle + \sum_j \langle u_i (D_i u_1) \varphi_1 \rangle - \left\langle p, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right\rangle = \langle f_1, \varphi_1 \rangle.$$

Tương tự với u_2 và cộng lại

$$\langle u', \varphi \rangle_{(L^2)^2} + a(u, \varphi) + b(u, u, \varphi) = \langle f, \varphi \rangle.$$

Công thức trên đúng với mọi $\varphi \in \gamma$, nên cũng đúng với mọi $\varphi \in V$.

Vậy nếu (u, p) là lời giải (khá đều) của (1) thì

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \langle u, v \rangle_{(L^2)^2} + a(u, v) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in V, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \tag{2}$$

trong đó $f \in L^2(0, T, V'), u_0 \in L^2$.

Ngược lại, nếu u là lời giải của (2) thì với mọi $\varphi \in \gamma$, đi ngược lại các biến đổi trên ta có

$$\left\langle \xi := (u' - \Delta u + \sum_j u_i D_i u - f), \varphi \right\rangle_{(L^2)^2} = 0.$$

Suy ra $\xi \in \gamma^{\perp (L^2)^2}$. Ta có định lý sau (sẽ chứng minh ở cuối bài)

Định lý. Nếu $\xi \in \gamma^{\perp (L^2)^2}$ thì tồn tại p sao cho $\xi = \overrightarrow{\text{grad}} p$. Khi đó (u, p) chính là lời giải của (1).

III. Giải bài toán biến phân (2)

Bổ đề 3. Cho $\Omega \subset R^2, v \in H_0^1(\Omega)$, thì

$$\|v\|_{L^4} \leq 2^{1/4} \|v\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2}^{1/2}.$$

Bổ đề 4. Cho $u \in L^2(0,T,V)$ và Bu xác định bởi

$$\langle Bu, v\rangle = b(u,u,v), \forall v \in V.$$

Thì $Bu \in L^1(0,T,V')$.

Bây giờ nhắc lại $a(u,v) = \sum\limits_j \langle \nabla u_j, \nabla v_j\rangle$ song tuyến tính, liên tục. Do đó $\forall u \in V, \exists Au \in V$ sao cho

$$a(u,v) = \langle Au, v\rangle, \forall v \in V.$$

Ta có $A \in L(V,V')$ và $A : L^2(0,T,V) \to L^2(0,T,V')$.

Với các toán tử A, B, ta viết lại bài toán

$$\begin{aligned}&\langle u', v\rangle_{(L^2)^2} + a(u,v) + b(u,u,v) = \langle f, v\rangle, \forall v \in V,\\ &\Leftrightarrow \langle u' + Au + Bu, v\rangle = \langle f, v\rangle, \forall v \in V,\end{aligned}$$

tức là $u' = -Au - Bu + f$ trong $D'(0,T,V')$.

Xem số hạng bên phải, do $u \in L^2(0,T,V)$ nên theo Bổ đề 4 thì $Bu \in L^1(0,T,V')$. Suy ra $u' \in L^1(0,T,V')$. Theo một định lý của Lions ta có $t \mapsto u(t)$ liên tục $[0,T] \to V$. Nói riêng, cho $t \to 0$ suy ra $u_0 \in V$ (điều kiện để điều kiện đầu có nghĩa).

Tuy nhiên, ta sẽ muốn đẳng thức $u' = -Au - Bu + f$ xảy ra trong $L^2(0,T,V')$ chứ không phải là $L^1(0,T,V')$.

Bổ đề 5. Nếu $u \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,L^2)$ thì $Bu \in L^2(0,T,V')$.

Từ đó, ta có

Định lý 1. Nếu u là lời giải của bài toán (2) ứng với $f \in L^2(0,T,V')$ và $u_0 \in V$ thì

$$u' = -Au - Bu + f \text{ trong } L^2(0,T,V').$$

Đặt $H = \overline{\gamma}_{L^2}$. Chú ý là $H \neq L^2$. Điều kiện $u_0 \in V$ có thể nới rộng thành $u_0 \in H$ (chú ý là nếu chỉ có $u_0 \in L^2$ thì không đủ).

Bổ đề 6. Nếu $u \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H)$ thì $u \in L^4(0,T,L^4)$.

Sự tồn tại lời giải

• Lời giải xấp xỉ.

Chú ý là $V \subset H$ compact. Do đó bài toán phổ

$$\langle u, v\rangle_V = \lambda \langle u, v\rangle_H, \forall v \in V,$$

có dáy các trị riêng và vector riêng là $(\lambda_j, w_j)_j$, trong đó $\lambda_j > 0, \|w_j\|_V = 1$.

Ta sẽ dùng $\{w_j\}$ như một cơ sở đặc biệt cho bài toán xấp xỉ, tức là ta sẽ tìm

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^{n} g_{nj}(t) w_j(x)$$

là lời giải của bài toán trong không gian $V_n =< w_j | j = 1, 2..., n >$,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\langle u_n, v\rangle + a(u_n, v) + b(u_n, u_n, v) = \langle f, v\rangle, \forall v \in V_n, \\ u_n(0) = u_{0n}, \end{cases} \quad (3)$$

hay

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\langle u_n, v_h\rangle + a(u_n, v_h) + b(u_n, u_n, v_h) = \langle f, v_h\rangle, \forall h = 1, 2, ..., n, \\ u_n(0) = u_{0n}, \end{cases} \quad (4)$$

trong đó $u_{0n} \in V_n$ được chọn sao cho $u_{0n} \to u_0$ trong H.

Ta thấy (4) là một hệ vi phân phi tuyến với biến số $t \mapsto g_{nj}(t)$, có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = F(t, X(t)), \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

trong đó $F(t, x)$ liên tục. Theo định lý Cauchy-Ascoli, bài toán này có một lời giải cực đại, tức là tồn tại $T_n \in [0, T]$ lớn nhất sao cho bài toán (4) có lời giải $u_n(t)$ với $t \in [0, T_n]$.

• Dùng đánh giá tiên nghiệm, ta chứng tỏ $T_n = T$.

Trong (3) chọn $v = u_n$, ta suy ra

$$\sup_{t\in[0,T_n]} ess \,\|u_n(t)\|_H \le C_T.$$

Điều này cho phép nối dài lời giải để đạt được $T_n = T$.

Hơn nữa, ta có

Bổ đề 7. u_n bị chặn trong $L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$, tức là

$$\|u_n(t)\|_H^2 + \int_0^T \|u_n(t)\|_V^2 \le C_T$$

Bổ đề 8. $u_n'(t)$ bị chặn trong $L^2(0, T, V')$.

• Qua giới hạn.

Ta dùng định lý nhúng compact của Lions với

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 2, X_0 = V, X = H, X_1 = V'$$

suy ra tồn tại một dãy con $\{u_\mu\} \subset \{u_n\}$ sao cho

$$\begin{cases} u_\mu \overset{weak}{\to} u \text{ in } L^2(0, T, V), \\ u_\mu \overset{weak*}{\to} u \text{ in } L^\infty(0, T, H), \\ u_\mu' \overset{weak}{\to} u' \text{ in } L^2(0, T, V'), \\ u_\mu \to u \text{ in } L^2(0, T, H), \\ u_\mu(0) \overset{weak}{\to} u(0) \text{ in } H. \end{cases} \quad (5)$$

Chú ý là ta đã có $u_n(0) = u_{0n} \to u_0$ trong H, nên sự hội tụ cuối cùng trong (5) sẽ dẫn tới $u(0) = u_0$. Để chứng minh u thỏa đẳng thức biến phân, ta cần

Bổ đề 9. Ta có $(u_\mu)_i(u_\nu)_j \overset{weak}{\to} u_i u_j$ in $L^2(0, T, L^2)$.

Từ đó, với mỗi m, chuyển qua giới hạn ta được

$$\langle u', w\rangle + a(u, w) + b(u, u, w) = \langle f, w\rangle \text{ in } L^2(0, T),$$

với mọi $w \in V_m$. Vậy điều này đúng với mọi $w \in V$.

IV. Tính duy nhất

Bổ đề Gronwall. Cho các hàm số $w \in L^1(0, T), w \geq 0$, $m \geq 0$, φ liên tục và C là một hằng số không âm. Giả sử

$$\varphi(t) \leq C + \int_0^t m(\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma, \forall t \in [0, T].$$

Thì

$$\varphi(t) \leq C \exp\left(\int_0^t m(\sigma)d\sigma\right), \forall t \in [0, T].$$

Bây giờ giả sử u_1, u_2 là hai lời giải của bài toán biến phân

$$\begin{cases} \langle u', w\rangle + \langle Au, w\rangle + \langle Bu, w\rangle = \langle f, w\rangle, \forall w \in V, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Đặt $\widetilde{u} = u_1 - u_2$, thì $\widetilde{u}$ thỏa mãn bài toán

$$\begin{cases} \langle \widetilde{u}', w\rangle + \langle A\widetilde{u}, w\rangle + \langle Bu_1 - Bu_2, w\rangle = 0, \forall w \in V, \\ \widetilde{u}(0) = 0. \end{cases}$$

Chọn $w = \widetilde{u}$ suy ra $\widetilde{u} = 0$. Vậy ta có

Định lý. Với $u_0 \in H$, $f \in L^2(0, T, V')$ thì bài toán biến phân (2) có 1 lời giải duy nhất

$$u \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$$

sao cho $u' \in L^2(0, T, V')$.

V. Bổ túc

Cho $\Omega \in R^2$, $\Gamma = \partial\Omega$ đều, $E(\Omega) = \{u \in (L^2(\Omega))^2 | \text{ div}u \in L^2(\Omega)\}$.

Công thức Stokes Với $u \in E(\Omega), v \in H^1$ thì

$$\left\langle u, \overrightarrow{gradv}\right\rangle_{L^2} + \langle \text{div}u, v\rangle_{L^2} = \langle \gamma_\nu u, \gamma_0 v\rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Chú ý rằng γ_0 là ánh xạ vết, và $\gamma_\nu u = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{\nu} = \sum_{i=1}^{2} u_i\nu_i$, với $\overrightarrow{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ là pháp tuyến ngoài.

Nhắc lại kí hiệu

$$\gamma = \left\{ u \in (D(\Omega))^2 |\ \mathrm{div} u = 0 \right\},$$
$$V = \overline{\gamma}_{(H_0^1)^2} = \left\{ v \in (H_0^1)^2 |\ \mathrm{div} v = 0 \right\}, \quad H = \overline{\gamma}_{(L^2)^2}.$$

Thì ta có định lý sau, khẳng định rằng tồn hàm số p là lời giải của bài toán Navier-Stokes.

Định lý. Cho Ω mở bị chặn trong R^2, $\Gamma = \partial\Omega$ đều. Thì

$$H = \left\{ u \in (L^2)^2 |\ \mathrm{div} u = 0, \gamma_\nu u = 0 \right\},$$
$$H^\perp = \left\{ u \in (L^2)^2 |\ \exists p \in H^1, u = \overrightarrow{\mathrm{grad}} p \right\}.$$

ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Cho $\Omega \subset R^2$, $\Gamma = \partial\Omega$ đều. Xét bài toán

$$\begin{cases} -\Delta u + \overrightarrow{\mathrm{grad}} p = f, & \text{trong } \Omega, \\ \mathrm{div} u = 0, & \text{trong } \Omega, \\ u|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Nếu $u \in V = \{v \in (H_0^1)^2 |\ \mathrm{div} v = 0\}$ là lời giải của (1) thì

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in V. \tag{2}$$

2. Nếu $(u, p) \in V \times L^2$ là lời giải của (1) thì

$$a(u, v) - \langle p, divv \rangle = \langle f, v \rangle, \forall v \in (H_0^1)^2. \tag{3}$$

3. Cho $W_h \subset (H_0^1)^2, Q_h \subset L^2$ chiều hữu hạn. Ta đặt

$$V_h = \{ v_h \in W_h |\ \langle q_h, divv_h \rangle = 0, \forall q_h \in Q_h \}.$$

Chú ý rằng V_h không chứa trong V và tồn tại duy nhất $u_h \in V_h$ sao cho

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \forall v_h \in V_h. \tag{4}$$

4. Gọi u là lời giải của (1) và u_h như trên, thì

$$\|u - u_h\|_{H_0^1} \le C \left(\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1 + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_{L^2} \right).$$

5. Giả sử Ω mở, bờ đa giác K. Bằng phương pháp phần tử hữu hạn, ta có thể xây dựng V_h, Q_h và các ánh xạ $\pi_h : (H^2)^2 \cap V \to V_h, S_h : H^1 \to Q_h$ sao cho

$$\|\pi_h v - v\|_1 \le Ch|v|_2, \forall v \in H^2 \cap V,$$
$$\|S_h q - q\|_{L^2} \le Ch|q|_1, \forall q \in H^1,$$

trong đó C là hằng số không phụ thuộc h, |.| là ký hiệu nửa chuẩn.
6. Ta có xấp xỉ

$$\|u-u_h\|_1 \le Ch\left(|u|_2+|p|_1\right).$$

BÀI TẬP

Cho Ω là tập mở, liên thông, bị chặn trong R^2 có biên $\Gamma=\partial\Omega$ đủ trơn.
Câu 1. Với $v\in H^1$ đặt

$$\|v\|_{1*}=\sqrt{\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\,dx+\left(\int\limits_\Omega v dx\right)^2}.$$

Chứng minh rằng $\|.\|_{1*}$ là 1 chuẩn tương đương với chuẩn thông thường của H^1.
Câu 2. Cho $V=\left\{v\in H^1(\Omega)|\int\limits_\Omega v(x)dx=0\right\}$ và $f\in L^2(\Omega)$. Xét bài toán biến phân

$$\int\limits_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx=\int\limits_\Omega f(x)v(x)dx,\forall v\in V.$$

a) Chứng minh bài toán biến phân trên có 1 lời giải duy nhất u.
b) Chứng minh tồn tại duy nhất $\lambda\in R$ sao cho

$$\int\limits_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx=\int\limits_\Omega (f(x)-\lambda)v(x)dx,\forall v\in H^1(\Omega).$$

c) Từ đó liên hệ với bài toán

$$\begin{cases}-\Delta u=f-\lambda \text{ in } \Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=0 \text{ on } \partial\Omega.\end{cases}$$

Câu 3. Giả sử Ω là tập mở bị chặn trong R^2 có biên $\Gamma=\partial\Omega$ là một đa giác. Đặt $(T_h)_h$ là một họ các tam giác chính quy của Ω. Ta xấp xỉ $H^1(\Omega)$ bởi

$$W_h=\left\{v_h\in C^0(\overline{\Omega}),v_h|_K\in P_1,\forall K\in T_h\right\},$$

và xấp xỉ V bởi $V_h=V\cap W_h$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất $u_h\in V_h$ là lời giải của bài toán xấp xỉ

$$\int\limits_\Omega \nabla u_h(x).\nabla v_h(x)dx=\int\limits_\Omega f(x)v_h(x)dx,\quad \forall v_h\in V_h.$$

Câu 4. Chỉ ra một ánh xạ $\Lambda_h: V\cap C^0(\overline{\Omega})\to V_h$ sao cho

$$\|\Lambda_h v-v\|_1\le Ch\|v\|_2,\quad \forall v\in H^2.$$

Câu 5. Giả sử $u \in V \cap H^2$, chứng tỏ

$$\|u_h - u\|_1 \leq Ch \|u\|_2 .$$

VÍ DỤ VỀ BÀI TOÁN KHÔNG CHỈNH VÀ SỰ CHÍNH QUY HÓA

Xét bài toán nhiệt ngược thời gian

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \\ u(x,T) = \varphi(x), \end{cases} \tag{1}$$

với $t \in (0,T)$, $x \in R$.

1. Bài toán không chỉnh

Xét

$$u_m(x,t) = \frac{1}{m^j} e^{(m\pi)^2(T-t)} \sin(m\pi x), \varphi_m(x) = \frac{1}{m^j} \sin(m\pi x).$$

là lời giải của (1), có

$$\|\varphi_m\|_{L^2} \to 0, \|u_m\|_{L^2} \to \infty.$$

Điều này có nghĩa là một sai số nhỏ của dữ liệu có thể dẫn tới một sai số lớn của lời giải.

2. Chính quy hóa

Ta sẽ xét bài toán

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = \mu v_{xxt}, \\ v(x,T) = \varphi_\delta(x), \end{cases} \tag{2}$$

trong đó φ_δ là dữ liệu thỏa mãn $\|\varphi_\delta - \varphi_m\|_{L^2} \leq \delta$, và μ là tham số sẽ được chọn thích hợp.

Biến đổi Fourier bài toán (1) ta được

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\widehat{u} + \xi^2 \widehat{u} = 0, \\ \widehat{u}(T) = \widehat{\varphi}, \end{cases}$$

suy ra

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{\xi^2(T-t)}\widehat{\varphi}(\xi).$$

Tương tự, biến đổi Fourier của bài toán (2) suy ra

$$\widehat{v}(\xi,t) = e^{\frac{\xi^2}{1+\mu\xi^2}(T-t)}\widehat{\varphi_\delta}(\xi).$$

Sử dụng đẳng thức Parseval

$$\|u(.,t) - v(.,t)\|_{L^2} = \|\widehat{u}(.,t) - \widehat{v}(.,t)\|_{L^2} ,$$

ta đánh giá được sai số giữa u và v.
Định lý 1. Giả sử $\|u(.,0)\|_{L^2} \leq E$. Chọn

$$\mu = \frac{T}{\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)},$$

ta có

$$\|u(.,t) - v(.,t)\|_{L^2} \leq \frac{C(t)E}{\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)} + E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}, \forall t \in (0,T],$$

trong đó

$$C(t) = \left(\frac{2}{et}\right)^2 (T-t)T.$$

Chú ý rằng đánh giá trong Định lý 1 chỉ có hiệu lực khi $t > 0$. Trong trường hợp $t = 0$ ta có kết quả sau.
Định lý 2. Giả sử $\|u(.,0)\|_{H^p} \leq E$. Chọn

$$\mu = \frac{T}{\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)\right)^{-2p}\right)},$$

ta có

$$\|u(.,0) - v(.,0)\|_{L^2} \leq \varepsilon_1(\delta),$$

trong đó $\varepsilon_1(\delta) \to 0$ khi $\delta \to 0^+$.

ĐỀ THI CUỐI KHÓA THÁNG 11 NĂM 2007

Cho $\Omega = (0,1)$. Ta nhắc lại $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v(0) = v(1) = 0\}$ với chuẩn $\|v\|_{H_0^1} = \left(\int\limits_\Omega |v'|^2\, dx\right)^{1/2}$.

1. Chứng minh rằng tập con $\widetilde{V} = L^1(\Omega)$ xác định bởi

$$\widetilde{V} = \left\{ v \in L^1(\Omega) : \exists g \in L^2(\Omega), \int\limits_\Omega v(x)\varphi''(x)dx = \int\limits_\Omega g(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in D(\Omega) \right\}$$

trùng với $H^2(\Omega)$.
Hướng dẫn: Ta có thể xét hàm số

$$\Psi(x) = \int\limits_0^x \left[\varphi(\xi) - \theta(\xi)\int\limits_0^1 \varphi(\eta)d\eta\right] d\xi, \quad \varphi, \theta \in D(\Omega)$$

với $\int\limits_0^1 \theta(t)dt = 1$.

2. Cho phiếm hàm $J : R^m \to R$ liên tục sao cho $\lim\limits_{\|v\|_{R^m}\to\infty} J(v) = +\infty$. Chứng minh rằng

$$\exists u_m \in R^m : J(u_m) = \inf_{v\in R^m} J(v).$$

3. Cho hàm $f : [0,1] \times R \to R$ liên tục và bị chặn.

a// Chứng minh rằng tập $\{\varphi_j\}_{j=1,2,\ldots}$ với $\varphi_j = \sqrt{2}\sin(j\pi x)$ là một cơ sở của $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = V$ với chuẩn $\|u\|_V = \left[\int\limits_0^1 \left(|u'|^2 + |u''|^2\right) dx\right]^{1/2}$.

b// Cho V_m là không gian con m chiều sinh bởi $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m\}$. Chứng minh rằng $\exists u_m \in V_m$ sao cho

$$\int\limits_0^1 u_m'(x)\varphi_j'(x)dx = \int\limits_0^1 f(x, u_m(x))\varphi_j(x)dx, j = 1, 2, ..., m. \tag{1}$$

Hướng dẫn: Ta có thể xét phiếm hàm J xác định bởi

$$J(v) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 |v'|^2 dx - \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{v(x)} f(x,t)dt.$$

c// Từ đó hãy suy ra $\exists u \in C(\overline{\Omega})$ sao cho

$$-\int\limits_0^1 u(x)\varphi''(x)dx = \int\limits_0^1 f(x, u(x))\varphi(x)dx, \forall\varphi \in D(\Omega),$$

và cuối cùng chứng minh rằng u là nghiệm của bài toán (P)

$$(P) \qquad \begin{cases} u \in C^2(\overline{\Omega}), \\ -u''(x) = f(x, u(x)), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

4. Bây giờ giả sử rằng $f(x,\sigma) \geq 0,\ \forall x \in \overline{\Omega}, \forall\sigma \in R$. Chứng minh rằng mọi nghiệm của bài toán (P) là nghiệm dương.

5. Ta giả sử rằng $(f(x,\sigma_1) - f(x,\sigma_2))(\sigma_1 - \sigma_2) \leq 0,\ \forall x \in \Omega, \forall\sigma_1, \sigma_2 \in R$.

a// Chứng minh rằng (P) có một nghiệm duy nhất.

b// Chứng minh rằng dãy $\{u_m\}$ hội tụ đến u trong $H^2(\Omega)$ mạnh.

6. Bây giờ ta quan tâm đến giải số của bài toán (P) bằng phần tử hữu hạn cấp một. Ta xét sơ đồ tuyến tính hóa dưới đây:

• Cho trước $u^{(n-1)} \in C^2(\overline{\Omega})$. Tìm nghiệm $u^{(n)}$ của bài toán

$$(P') \qquad \begin{cases} -(u^{(n)})''(x) = f(x, u^{(n-1)}(x)), \\ u^{(n)}(0) = u^{(n)}(1) = 0. \end{cases}$$

• Cho $h = 1/N$, N là số nguyên ≥ 1. Gọi

$$W_h = \{u_h : \overline{\Omega} \to R, u_h \text{ liên tục và là hàm afin trên mỗi khoảng}$$
$$jh < x < (j+1)h,\ j = 1, 2, ..., N-1,\ u_h(0) = u_h(1) = 0\}.$$

Ta nhắc lại một cơ sở chính tắc của W_h sinh ra bởi các hàm w_{hj} sao cho $w_{hj}(hk) = \delta_{kj}$, trong đó δ_{kj} là ký hiệu Kronecker.

a// Tính chiều của W_h.

b// Xét phương trình biến phân (P'_h) liên hệ với (P') trong W_h và từ đó tính toán ma trận cứng A_h của hệ xấp xỉ (P'_h) của (P').

Chú ý: Ta không cần chứng minh sự hội tụ của dãy $\{u_h^{(n)}\}$ đến nghiệm u của bài toán (P).

HẾT