BÀI TẬP GIẢI TÍCH 1

1.5.2.6. Cho A và B là hai tập con của tập E. Chứng minh $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$.

Giải.

Ta có

- $E \setminus A = \{t \in E : t \notin A\}$.
- $E \setminus B = \{u \in E : u \notin B\}$.
- $(E \setminus A) \cup (E \setminus B) = \{x \in E : x \in E \setminus A$ hoặc $x \in E \setminus B\}$

$= \{x \in E : x \notin A$ hoặc $x \notin B\}$. (1)

- $E \setminus (A \cap B) = \{s \in E : s \notin A \cap B\}$.

Đặt P là "$s \in A \cap B$" hay "$s \in A$ và $s \in B$", ta có $\sim P$ là "$s \notin A$ hoặc $s \notin B$". Từ đó ta có

$E \setminus (A \cap B) = \{s \in E : s \notin A$ hoặc $s \notin B\}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

1.5.3.9. Tìm phủ định của mệnh đề sau: "$x \leq a$ với mọi $x \in A$" và "$a \leq b$ nếu $x \leq b$ với mọi $x \in A$".

Giải.

Đặt $P =$ "$x \leq a$ với mọi $x \in A$", và $q =$ "$a \leq b$ nếu $x \leq b$ với mọi $x \in A$". Vậy mệnh đề cho sẵn có dạng "P và Q" và phủ định của nó là "$\sim P$ hoặc $\sim Q$". Ta có

- "$\sim P$" : " có $x \in A$ sao cho $x > a$".
- Q : "$a \leq b \ \ \forall\, b \in \{c : x \leq c \ \forall\, x \in A\}$.
- $\sim Q$: "$\exists\, b \in \{c : x \leq c \ \forall\, x \in A\}$ sao chò $a > b$".
- "$\sim P$ hoặc $\sim Q$" : " có $x \in A$ sao cho $x > a$" hoặc "$\exists\, b$ sao cho $x \leq b \ \forall\, x \in A$ và $a > b$".

1.5.3.14. Chứng minh không có hai số nguyên dương m và n sao cho $\dfrac{m}{n} = \sqrt{2}$.

Giải.

Giả sử có hai nguyên dương m và n sao cho $\dfrac{m}{n} = \sqrt{2}$. Gọi d là ước số chung lớn nhất của m và n, lúc đó có hai nguyên dương p và q sao cho $m = dp$ và $n = dq$. Ta có $\dfrac{p}{q} = \sqrt{2}$ và p và q có ước số chung lớn nhất là 1.

Từ đó $\dfrac{p^2}{q^2} = 2$. Vậy $p^2 = 2q^2$. Từ đó p^2 chia chẵn cho 2. Suy ra p chia chẵn cho 2. Điều này lại dẫn đến $p^2 = 2q^2$ chia chẵn cho 4. Vậy q^2 chia chẵn cho 2. Suy ra q chia chẵn cho 2.

Vậy 2 là một ước số chung của p và q : mâu thuẫn . Do đó không có hai số nguyên dương m và n sao cho $\dfrac{m}{n} = \sqrt{2}$.

2.5.2.1.(iv) Cho f là một ánh xạ từ tập X vào tập Y, cho A và B là hai tập con của X.

Chứng minh $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Giải.

• $f(A \cap B) = \{y : \exists x \in A \cap B$ sao cho $y = f(x)\}$

• $f(A) = \{u : \exists s \in A$ sao cho $u = f(s)\}$

• $f(B) = \{v : \exists t \in B$ sao cho $v = f(t)\}$

Ta phải chứng minh :

• cho $y \in f(A \cap B)$ chứng minh $y \in f(A) \cap f(B)$

• "$y \in f(A \cap B)$" $\Rightarrow$ "$y \in f(A) \cap f(B)$"

• "có $x \in A \cap B$ sao cho $y = f(x)$" $\Rightarrow$ "có $s \in A$ sao cho $y = f(s)$, và có $t \in B$ sao cho $y = f(t)$"

Đặt $s = x$ và $t = x$ ta có $y = f(s) = f(t)$.

2.5.2.2. Cho f là một ánh xạ từ tập X vào tập Y, cho A và B là hai tập con của X. Chứng minh $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$.

Giải.

Cho một y trong $f(A) \setminus f(B)$, chứng minh y thuộc $f(A \setminus B)$.

• $f(A) = \{u : \exists s \in A$ sao cho $u = f(s)\}$

• $f(B) = \{v : \exists t \in B$ sao cho $v = f(t)\}$

• $y \in f(A) \setminus f(B)$: có $s \in A$ sao cho $y = f(s)$ nhưng không có $t \in B$ sao cho $y = f(t)$. (1)

• $f(A \setminus B) = \{y : \exists x \in A \cap B$ sao cho $y = f(x)\}$

• $y \in f(A \setminus B)$: có x trong A nhưng x không trong B sao cho $y = f(x)$. (2)

Chọn $x = s$ trong (1), ta thấy x thoả (2) : đpcm.

3.7.3.1. Chứng minh $1!1 + 2!2 + \cdots + n!n = (n+1)! - 1$ (0)

Giải

• $n = 1$: $1!1 = 1$ và $2! - 1 = 1$. Vậy (0) đúng với $n = 1$.

• Giả sử (0) đúng với $n - k$. Ta có

$1!1 + 2!2 + \cdots + k!k = (k+1)! - 1$ (0).

Ta chứng minh (0) đúng với $n = k + 1$. Ta có

$1!1 + 2!2 + \cdots + k!k + (k+1)!(k+1) = [1!1 + 2!2 + \cdots + k!k] + (k+1)!(k+1)$ (0).

$$(k+1)! - 1 + (k+1)!(k+1) = (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1.$$

Vậy (0) với $n = k + 1$. Áp dụng qui nạp toán học ta có (0) đúng với mọi số nguyên n.

4.2.3.1. Cho A là một tập con khác trống và bị chặn trên của $\mathbb{R}$, cho c là một chặn trên của A. Giả sử mọi số thực dương ε đều có một x trong A sao cho $c - \varepsilon < x$. Chứng minh

$c = \sup A$.

Giải .

Giả sử $c > \sup A$. Đặt $\varepsilon = \dfrac{c - \sup A}{2}$. Ta thấy

$c - \varepsilon = c - \dfrac{c - \sup A}{2} = \dfrac{c + \sup A}{2} > \sup A$ (1)

$\exists x \in A$ sao cho $x > c - \varepsilon$. (2).

Từ (1) và (2), ta có một x trong A sao cho $x > \sup A$. Mâu thuẩn này cho thấy $c \leq \sup A$, vậy $c = \sup A$.

4.2.3.4. Cho A là một tập con khác trống và bị chặn trên của $\mathbb{R}$. Đặt $-A = \{-x : x \in A\}$. Chứng minh

(i) $-A$ bị chặn dưới.

(ii) $\inf -A = -\sup A$.

Giải .

(i) Đặt $B = -A = \{-x : x \in A\}$. Ta phải chứng minh

$y \geq -\sup A \qquad \forall\, y \in B$ hay

$y \geq -\sup A \qquad \forall\, y = -x, x \in A$ hay

$-x \geq -\sup A \qquad \forall\, x \in A$ hay

$x \leq \sup A \qquad \forall\, x \in A$.

Dòng sau cùng hiển nhiên đúng .

(ii) Do (i), ta có $\inf -A \geq -\sup A$. Ta chỉ còn phải chứng minh $\inf -A \leq -\sup A$ hay $\sup A \leq -\inf -A$. Ta phải chứng minh

$x \leq -\inf -A \qquad \forall\, x \in A$. hay

$-x \geq \inf -A \qquad \forall\, x \in A$. hay

$-x \geq \inf -A \qquad \forall -x \in -A$.

Dòng sau cùng hiển nhiên đúng .

4.2.3.3. Cho A và B là hai tập con khác trống của $\mathbb{R}$ sao cho $A \subset B$. Chứng minh

(i) Nếu B bị chặn trên thì $\sup A \leq \sup B$.

(ii) Nếu B bị chặn dưới thì $\inf A \geq \inf B$.

Giải .

(i) Đặt $M = \sup B$. Ta phải chứng minh $x \leq M$ với mọi x trong A. Cho x trong A, ta có x thuộc B (vì $A \subset B$), vậy $x \leq M$.

(i) Đặt $M' = \inf B$. Ta phải chứng minh $x \geq M'$ với mọi x trong A. Cho x trong A, ta có x thuộc B (vì $A \subset B$), vậy $x \geq M'$.

5.6.2.4. Cho $\{a_k\}$ là một dãy số thực Cauchy. Chứng minh có hai thực b và c sao cho $b \le a_k \le c$ với mọi $k \in I\!N$.

Giải.

Ta chỉ cần tìm một số thực M sao cho $|a_k| \le M$ với mọi $k \in I\!N$.

Cho một $\varepsilon > 0$, ta tìm được một số nguyên $N(\varepsilon)$ sao cho

$|a_m - a_n| \le \varepsilon \qquad\qquad \forall\ m > n \ge N(\varepsilon)$.

Vậy

$|a_m| \le |a_m - a_n| + |a_n| \le \varepsilon + |a_n| \qquad\qquad \forall\ m > n \ge N(\varepsilon)$.

Do đó

$|a_m| \le |a_n| + 1 \qquad\qquad \forall\ m > n \ge N(1)$.

$|a_m| \le |a_{N(1)}| + 1 \qquad\qquad \forall\ m > N(1) \qquad\qquad (1)$.

Đặt $M = \max\{|a_1|, \cdots, |a_{N(1)}|, |a_{N(1)}| + 1\}$

Từ (1) ta có

$|a_k| \le M$ với mọi $k \in I\!N$.

5.6.2.9. Cho A là một trong các khoảng sau : $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ hay $(-\infty, \infty)$. Cho g là một ánh xạ từ A vào A sao cho có một số thực $c \in (0, 1)$ để cho

$$|g(x) - g(y)| \le c|x - y| \qquad\qquad \forall\ x,\ y \in A.$$

Lúc đó ta nói g là một ánh xạ co trên A . Cho $a_0 \in A$. Đặt $a_1 = g(a_0)$, $a_2 = g(a_1)$, $\cdots$, $a_{n+1} = g(a_n)$ với mọi $n \in I\!N$. Chứng minh

(i) $|a_{n+1} - a_n| \le c^n|a_1 - a_0| \qquad\qquad \forall\ n \in I\!N$.

(ii) Dãy $\{a_n\}$ hội tụ về một số thực $b \in A$.

(iii) Giới hạn b của dãy $\{a_n\}$ chính là một điểm bất động của g , nghĩa là $g(b) = b$.

(iv) g chỉ có một điểm bất động trong A.

Giải.

(i) Dùng Qui nạp toán học. Đặt P_n là "$|a_{n+1} - a_{n+1}| \le c^n|a_1 - a_0|$". Khi n=1, do tính co g ta có

$|a_2 - a_1| = |g(a_1) - g(a_0)| \le c|a_1 - a_0|$

Vậy P_1 đúng. Giả sử P_k đúng, ta có

$|a_{k+1} - a_k| \le c^k|a_1 - a_0| \qquad\qquad (1)$.

Ta chứng minh P_{k+1} cũng đúng. Ta có

$$\begin{aligned}|a_{k+1+1} - a_{k+1}| &= |g(a_{k+1}) - g(a_k)| \le c|a_{k+1} - a_k| \\ &\le cc^k|a_1 - a_0| = c^{k+1}|a_1 - a_0|\end{aligned}$$

Vậy P_{k+1} đúng. Theo qui nạp toán học ta có P_n đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Cho một $\varepsilon > 0$, tìm một số nguyên $N(\varepsilon)$ sao cho

$|a_m - a_n| \leq \varepsilon \qquad \forall\ m > n \geq N(\varepsilon). \qquad (2)$

Ta có

$|a_m - a_n| = |a_n - a_m| \leq |a_n - a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + a_{n+m-n-1} - a_m|$

$\leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m-n-1} - a_n|$

$\leq c^n|a_1 - a_0| + c^{n+1}|a_1 - a_0| + \cdots + c^{m-1}|a_1 - a_0|$

$= [c^n| + c^{n+1} + \cdots + c^{m-1}]|a_1 - a_0| \leq c^n|[1 + c^{+} \cdots + c^{m-1-n}]|a_1 - a_0|$

$\leq c^n[\sum_{k=0}^{\infty} c^k]|a_1 - a_0| \leq \dfrac{c^n}{1-c}|a_1 - a_0|. \qquad (3)$

Vì $\{\dfrac{c^n}{1-c}|a_1 - a_0|\}$ hội tụ về 0, nên cho $\varepsilon' > 0$, ta tìm được một số nguyên $M(\varepsilon')$ sao cho

$\dfrac{c^n}{1-c}|a_1 - a_0| = |\dfrac{c^n}{1-c}|a_1 - a_0| - 0| \leq \varepsilon' \qquad \forall\ n \geq M(\varepsilon'). \qquad (4)$

Nay cho $\varepsilon > 0$, đặt $\varepsilon' = \varepsilon$, ta có $M(\varepsilon')$, đặt $N(\varepsilon) = M(\varepsilon')$, ta có (2). Vậy $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy và nó hội tụ về một số thực b.

(iii) Ta phải chứng minh $g(b) = b$. Ta có

$|g(b) - b| \leq |g(b) - a_{n+1}| + |a_{n+1} - b| = |g(b) - g(a_n)| + |a_{n+1} - b|$

$\qquad \leq c|b - a_n| + |a_{n+1} - b|. \qquad (5).$

Suy ra

$|g(b) - b| \leq \lim\limits_{n\to\infty}[c|b - a_n| + |a_{n+1} - b|] = 0.$

(iv) Giả sử có u và v trong A sao cho $g(u) = u$ và $g(v) = v$, ta có

$|u - v| = |g(u) = g(v)| \leq c|u - v|.$

Vậy $0 \leq (1-c)|u - v| \leq 0$, vì $0 < c < 1$. Ta thấy $(1-c) > 0$, nên $|u = v = 0$.

5.6.3.2. Cho e là một số thực và $\{a_n\}$ là một dãy số thực sao cho $\{a_n\}$ không hội tụ về e . Chứng minh có số thực dương ε và một dãy con $\{a_{n_k}\}$ của $\{a_n\}$ sao cho $|a_{n_k} - e| \geq \varepsilon$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Giải.

Vì $\{a_n\}$ không hội tụ về e, nên có một số thực dương ε sao cho với mọi số nguyên N ta lại có một số nguyên $n(N) \geq N$ để cho $|a_{n(N)} - e| \geq \varepsilon$. Vậy tập $J = \{m : |a_m - e| \geq \varepsilon\}$ là một tập vô hạn. Dùng qui nạp toán học đặt

- $n_1 = \inf J$,
- $n_2 = \inf J \setminus [1, n_1]$.
- $n_{k+1} = \inf J \setminus [1, n_k]$.

Ta thấy $\{a_{n_k}\}$ là một dãy con cần tìm của $\{a_n\}$.

5.6.4.4. Cho e là một số thực và $\{a_k\}$ là một dãy số thực sao cho $\limsup_{n\to\infty} a_n < e$. Chứng minh có một số nguyên N sao cho $a_n < e$ với mọi $n \geq N$.

Giải.

Đặt $A_m = \{a_k : k \geq m\}$, $b_m = \sup A_m$. Lúc đó $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Đặt $\alpha = \lim_{n\to\infty} b_n$, ta có $\alpha < e$. Đặt $\varepsilon = \dfrac{e-\alpha}{2}$. Ta có

• $\alpha + \varepsilon < e$ (1).

• Ta có một số nguyên N sao cho

$|b_n - \alpha| < \varepsilon \qquad \forall\ n \geq N. \qquad (2)$

Từ (2) ta có

$b_n < \alpha + \varepsilon \qquad \forall\ n \geq N. \qquad (3)$

Vậy $\sup A_N < \alpha + \varepsilon$, do đó, theo (1) ta có

$a_n \leq \sup A_N < \alpha + \varepsilon < e \qquad \forall\ n \geq N.$

6.3.2.2. Cho hai khoảng mở (a, b) và (c, d), $A = (a, b) \cup (c, d)$, và f là một hàm số thực trên A. Đặt $g(t) = f(t)$ với mọi $t \in (a, b)$ và $h(s) = f(s)$ với mọi $s \in (c, d)$. Giả sử g liên tục trên (a, b), và h liên tục trên (c, d). Chứng minh f liên tục trên A.

Giải.

Cho một x trong A và một số thực dương ε, ta tìm một số thực dương $\delta(x, \varepsilon)$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\ y \in A, |y - x| < \delta(x, \varepsilon). \qquad (1)$

Ta có $x \in (a, b)$ hoặc $x \in (c, d)$. Trước hết ta xét trường hợp $x \in (a, b)$. Lúc đó vì tính liên tục của g, với một số thực dương ε', ta tìm một số thực dương $\nu(x, \varepsilon')$ sao cho

$|g(u) - g(x)| < \varepsilon' \qquad \forall\ u \in (a, b), |u - x| < \nu(x, \varepsilon').$

Vì $f(t) = g(t)$ với mọi $t \in (a, b)$, ta có

$|f(u) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\ u \in (a, b), |u - x| < \nu(x, \varepsilon'). \qquad (2)$

Đặt $\mu = \min\{x-a, b-x\}$, ta có $t \in (a, b)$ nếu $|t-x| < \mu$. Cho ε, đặt $\varepsilon' = \varepsilon$, ta có $\nu(x, \varepsilon')$. Đặt $\delta(x, \varepsilon) = \min\{\mu, \nu(x, \varepsilon')\}$. Ta thấy "$y \in (a, b), |u - x| < \nu(x, \varepsilon')$" nếu "$y \in A, |y - x| < \delta(x, \varepsilon)$". Do đó, theo (2) ta có (1).

6.3.2.4. Cho A là một tập con của $\mathbb{R}$, và f là một hàm số liên tục trên A. Chứng minh $|f|$ là một hàm số liên tục trên A.

Giải.

Cho một x trong A và một số thực dương ε, ta tìm một số thực dương $\delta(x, \varepsilon)$ sao cho

$||f|(y) - |f|(x)| < \varepsilon \qquad \forall\ y \in A, |y - x| < \delta(x, \varepsilon). \qquad (1)$

Do tính liên tục của f, với một số thực dương ε', ta tìm một số thực dương $\nu(x, \varepsilon')$ sao cho

$|f(u) - f(x)| < \varepsilon' \qquad \forall\, u \in A, |u - x| < \nu(x, \varepsilon'). \qquad (2)$

Ta có

$||f|(y) - |f|(x)| \leq |f(y) - f(x)|.$

Vậy theo (2) ta có

$||f|(y) - |f|(x)| \leq |f(y) - f(x)| < \varepsilon' \qquad \forall\, u \in A, |u - x| < \nu(x, \varepsilon'). \qquad (3)$

Cho ε, đặt $\varepsilon' = \varepsilon$, ta có $\nu(x, \varepsilon')$. Đặt $\delta(x, \varepsilon) = \nu(x, \varepsilon')$. Từ (3) ta có (1).

6.3.2.5. Cho f là một hàm số liên tục từ khoảng đóng $[a, b]$ vào $[a, b]$. Chứng minh có một x trong $[a, b]$ sao cho $f(x) = x$.

Giải.

Đặt $g(s) = s - f(s)$ với mọi s trong $[a, b]$. Ta thấy g là một hàm số liên tục trên $[a, b]$, $g(a) \leq 0 \leq g(b)$. Vì $g([a, b])$ là một khoảng đóng, nên $[g(a), g(b)] \subset g([a, b])$. Vì $0 \in [g(a), g(b)]$ nên $0 \in g([a, b])$. Vậy có x trong $[a, b]$ sao cho $g(x) = 0$. Lúc đó $f(x) = x$.

6.3.4.7. Cho A là một tập con khác trống trong $\mathbb{R}$. Đặt $A_x = \{|x - y| : y \in A\}$ và $f(x) = \inf A_x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh f là một hàm số liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

Giải.

Cho u và v trong $\mathbb{R}$ và y trong A, ta có

$f(u) \leq |u - y| \leq |u - v| + |v - y|$ hay

$f(u) - |u - v| \leq |v - y| \qquad \forall\, y \in A$ hay

$f(u) - |u - v| \leq s \qquad \forall\, s \in A_v.$

Vậy $f(u) - |u - v|$ là một chặn dưới của A_v. Do đó

$f(u) - |u - v| \leq \inf A_v = f(v)$ hay

$f(u) - f(v) \leq |u - v|. \qquad (1)$

Tương tự ta cũng có

$f(v) - f(u) \leq |v - u| = |u - v|. \qquad (2)$

Từ (1) và (2), ta có

$|f(v) - f(u)| \leq |v - u|. \qquad (3)$

Nay cho $\varepsilon > 0$, đặt $\delta = \varepsilon$, do (3) ta có

$|f(v) - f(u)| \leq \varepsilon \qquad \forall\, u, v \in \mathbb{R}, |u - v| \leq \delta.$

Vậy f liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

7.7.4.7. Cho hai khoảng mở (a, b) và $c \in (a, b)$, $A = (a, c) \cup (c, b)$, và f là một hàm số thực liên tục trên (a, b) và khả vi trên A. Giả sử $\lim_{t \to c} f'(t) = d$. Chứng minh f khả vi tại c và

$f'(c) = d$.

Giải.

Ta phải chứng minh

$\lim_{s\to 0} \frac{f(c+s)-f(c)}{s} = d$ hay

Cho một số thực dương ε, tìm một số thực dương $\delta(\varepsilon)$ sao cho

$|\frac{f(c+s)-f(c)}{s} - d| < \varepsilon \qquad \forall\ s, 0 < |s| < \delta(\varepsilon) \qquad (1)$

Cho s là một số thực dương khá nhỏ, dùng định lý giá trị trung bình, ta có một $x(s) \in (c, c+s)$ sao cho

$f(c+s) - f(c) = f'(x(s))(c+s-c) = f'(x(s))s$ hay

$\frac{f(c+s)-f(c)}{s} = f'(x(s)) \qquad (2)$

Cho s là một số thực âm với $|s|$khá nhỏ, dùng định lý giá trị trung bình, ta có một $x(s) \in (c+s, c)$ sao cho

$\frac{f(c+s)-f(c)}{s} = f'(x(s)) \qquad (3)$

Kết hợp (1) và (3) ta chỉ cần chứng minh điều sau đây : cho một số thực dương ε, tìm một số thực dương $\delta(\varepsilon)$ sao cho

$|f'(x(s)) - d| < \varepsilon \qquad \forall\ s, 0 < |s| < \delta(\varepsilon) \qquad (4)$

Vì $\lim_{t\to c} f'(t) = d$, ta có : cho một số thực dương ε', có một số thực dương $\nu(\varepsilon')$ sao cho

$|f'(t) - d| < \varepsilon' \qquad \forall\ t, 0 < |t-c| < \nu(\varepsilon') \qquad (5)$

Vì $|x(s) - c| < |s|$, nên với một ε, đặt $\varepsilon' = \varepsilon$, ta có $\nu(\varepsilon')$, đặt $\delta(\varepsilon) = \nu(\varepsilon')$, từ (5) ta có (4).

7.7.4.8. Cho f là một hàm số thực khả vi trên (a, b), và $x \in (a, b)$. Giả sử có một dãy $\{x_n\}$ trong $(a, b) \setminus \{x\}$ sao cho $\{x_n\}$ hội tụ về x và $f(x_n) = f(x)$ với mọi n trong $\mathbb{N}$. Chứng minh $f'(x) = 0$.

Giải.

Ta có $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$, hay : cho một $\varepsilon > 0$, ta có một $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)| < \varepsilon \qquad \forall\ h, 0 < |h| < \delta(\varepsilon). \qquad (1)$

Đặt $h_n = x_n - x$, ta có $x_n = x + h_n$. Vì $f(x_n) = f(x)$ và từ (1), ta có : cho một $\varepsilon > 0$, ta có một $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f'(x)| = |\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} - f'(x)| < \varepsilon \qquad \forall\ n, 0 < |h_n| < \delta(\varepsilon). \qquad (2)$

Vì $\{x_n\}$ hội tụ về x, ta có điều sau đây : cho một $\varepsilon' > 0$, ta có một $N(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|h_n| = |x_n - x| < \varepsilon' \qquad \forall\ n \geq N(\varepsilon'). \qquad (3)$

Vậy với mọi $\varepsilon > 0$, đặt $\varepsilon' = \varepsilon$, ta có $N(\varepsilon')$. Áp dụng (2) cho $h_{N(\varepsilon')}$, ta có :

$|f'(x)| < \varepsilon$

Vậy $|f'(x)| = 0$.

7.7.6.1. Cho $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ là một đa thức trên $I\!R$ với $a_n \neq 0$. Cho $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ sao cho $f(c_k) = 0$ với mọi $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$. Chứng minh $m \leq n$.

Giải.

Ta dùng qui nạp toán học theo n. Ta thấy bài toán đúng với $n = 1$, vì lúc đó $m = 1$. Giả sử bài toán đúng với $n = N$. Xét đa thức $g(x) = b_{N+1}x^{N+1} + b_N x^N + \cdots + b_1 x + b_0$ là một đa thức trên $I\!R$ với $b_{N+1} \neq 0$, và $d_1 < d_2 < \cdots < d_M$ sao cho $g(d_k) = 0$ với mọi $k \in \{1, 2, \cdots, M\}$. Ta sẽ chứng minh $M \leq N + 1$. Đặt $a_k = (k+1)b_{k+1}$ và

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Ta có bậc của f nhỏ hơn hoặc bằng N. Áp dụng định lý giá trị trung bình ta tìm được các $c_k \in (d_k, d_{k+1})$ với mọi $k \in \{1, 2, \cdots, M-1\}$ sao cho

$$0 = g(d_{k+1} - g(d_k) = g'(c_k)(b_{k+1} - b_k) \qquad \forall\ k \in \{1, 2, \cdots, M-1\}.$$

Suy ra $c_1 < c_2 < \cdots < c_{M-1}$ và $f(c_k) = g'(c_k) = 0$ với mọi $k \in \{1, 2, \cdots, M-1\}$. Theo giả thiết qui nạp toán học $M - 1 \leq N$, suy ra $M \leq N + 1$. Vậy bài toán đúng với mọi số nguyên n.

7.7.6.9. Chứng minh có duy nhất một x trong $(0, \infty)$ sao cho $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} - 4 = 0$.

Giải.

Đặt $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1} - 4$ với mọi $x \in [0, \infty)$. Ta thấy f liên tục trên $[0, \infty)$ và khả trên $(0, \infty)$. Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} > 0 \qquad \forall\ x \in (0, \infty).$$

Nay cho u và v trong $[0, \infty)$ sao cho $u < v$. Dùng Định lý giá trị trung bình ta có một $s \in (u, v)$ sao cho

$$f(v) - f(u) = f'(s)(v - u) > 0.$$

Vậy f là một đơn ánh trên $[0, \infty)$. Ta có $f(0) = -3$ và $f(15) = \sqrt{15}$. Vậy $[-3, \sqrt{15}]$ chứa trong $f([0, 15])$. Vậy có x trong $[0, 15]$ sao cho $f(x) = 0$. Do tính đơn ánh của f, nghiệm này duy nhất.

9.5.4.3. Đặt $f(x) = \int_{x^2}^{x^2+1} (\sin t^3 + t)dt$ với mọi số thực x. Chứng minh f khả vi trên $I\!R$ và tính đạo hàm của f.

Giải.

Đặt $g(y) = \int_y^0 (\sin t^2 + t)dt$ với mọi số thực y, $u(s) = s^2$ và $v(s) = s^2 + 1$. Ta thấy $f(x) = g(v(x)) - g(u(x)$ với mọi số thực x, hay $f = g \circ v - g \circ v$. Vì g, u và v đều khả nên f khả và với mọi x trong $I\!R$, ta có $g'(x) = \sin x^2 + x$, $u'(x) = 2x$,, $v'(x) = 2x$, và

$f'(x) = g'(v(x)).v'(x) - g'(u(x)).u'(x)$

$= \sin(v(x))^2.2x + v(x) - \sin(u(x))^2.2x - u(x) = \sin(x^4 + 2x^2 + 1) - \sin(x^4) + 1.$

9.5.4.7. Cho f là một hàm số khả n lần trên một khoảng (c, d), và $[a, b]$ chứa trong (c, d) sao cho $\int_a^b f(x)dx = 0$ và $f^r(a) = f^r(b) = 0$ với mọi r trong $\{0, 1, \cdots, n\}$. Cho g là một đa thức bậc bé hơn n. Chứng minh $\int_a^b f^{(n)}(x)g(x)dx = 0$.

Giải.

Ta chỉ cần chứng minh $\int_a^b x^k f(x)dx = 0$ với mọi k trong $\{0, 1, \cdots, n\}$. Ta qui nạp theo n. Hiển nhiên kết quả này đúng với $n = 0$. Giả sử bài toán dúng với $n = N$, ta sẽ chứng minh nó đúng với $n = N + 1$. Trước hết vì bài toán đúng với $n = N$, áp dụng bài toán cho f' vàf, ta có

$$\int_a^b x^k f^{(N+1)}(x)dx = \int_a^b x^k f^{(N)}(x)dx = 0 \qquad \forall\ k \in \{0, 1, \cdots, N\} \qquad (1)$$

Dùng phương pháp tích phân từng phần ta có

$$\int_a^b x^{N+1} f^{(N+1)}(x)dx = [b^{N+1}f^{(N)}(b) - a^{N+1}f^{(N)}(a)] - (N+1)\int_a^b x^N f^{(N)}(x)dx = 0$$

9.5.5.3. Cho f là một hàm số thực dương liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $f(x + y) = f(x)f(y)$ với mọi số thực x và y. Chứng minh f khả trên $\mathbb{R}$.

Giải.

Đặt $c = (\int_0^1 f(t)dt)^{-1}$. Cho x trong $\mathbb{R}$, ta có

$$\int_0^1 f(x+t)dt = \int_0^1 f(x)f(t)dt = f(x)\int_0^1 f(t)dt \qquad \text{hay}$$

$$f(x) = c\int_0^1 f(x+t)dt. \qquad (1)$$

Đặt $h(t) = x + t$ với mọi $t \in \mathbb{R}$, ta có $h'(t) = 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Áp dụng công thức đổi biến ta có

$$\int_0^1 f(x+t)dt = \int_0^1 f \circ h(t)dt = \int_{h(0)}^{h(1)} f(s)ds = \int_x^{x+1} f(s)ds. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$f(x) = c\int_x^{x+1} f(s)ds \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Đặt $g(t) = \int_0^s f(s)ds$, $u(t) = t$ và $v(t) = t + 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Ta có g, u và v khả vi trên $\mathbb{R}$ và $f(x) = c[g(v(x)) - g(u(x)]$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy $f = c[g \circ v - g \circ u]$, do đó f khả vi $\mathbb{R}$.