TOÁN GIẢI TÍCH 1

DƯƠNG MINH ĐỨC

Đây là các slides bài giảng môn Toán Giải Tích 1 dành cho sinh viên năm thứ nhất Khoa Toán-Tin, trường Đại học Khoa Học, Đại học Quốc Gia Thành Phố Hồ Chí Minh, niên học 2007-2008. Bài giảng này được soạn theo quyển : Giáo Trình Toán Giải Tích 1, của GS Dương Minh Đức, Nhà xuất bản Thống Kê, 2006.

CHƯƠNG MỘT

TẬP HỢP VÀ LÝ LUẬN CƠ BẢN

vấn đề thực tiễn → mô hình toán học

↓

kết luận toán học → diễn giải kết luận

↑ vấn đề thực tiễn

TOÁN HỌC VÀ THỰC TIỄN

Một vấn đề có thể giải quyết bằng các bước sau :

- dùng toán để mô hình vấn đề : làm rõ và gọn hơn,
- dùng các phương pháp toán để giải quyết bài toán trong mô hình.
- diễn giải kết quả toán học bằng ngôn ngử thực tiển

Thí dụ1. Giá một cuốn tập là 3.000$, quĩ tài trơ chỉ có 3.500.000$, hỏi có thể mua được bao nhiêu tập cho học sinh nghèo?

Chúng ta mô hình vấn đề này như sau: số tập mua là một số nguyên lớn hơn hay bằng 1, số tiền có thể chi trả chỉ có thể là các số từ 1 đến 3.500.000, nếu số tập mua được là n thì số tiền phải trả là $3.000\times n$.

Chúng ta mô hình vấn đề này như sau: số tập mua là một số nguyên lớn hơn hay bằng 1, số tiền có thể chi trả chỉ có thể là các số từ 1 đến 3.500.000, nếu số tập mua được là n thì số tiền phải trả là $3000 \times n$.

Chúng ta thấy trong mô hình này không còn các vấn đề rắc rối như : quĩ từ thiện, tập vở, tiền bạc và học sinh nghèo.

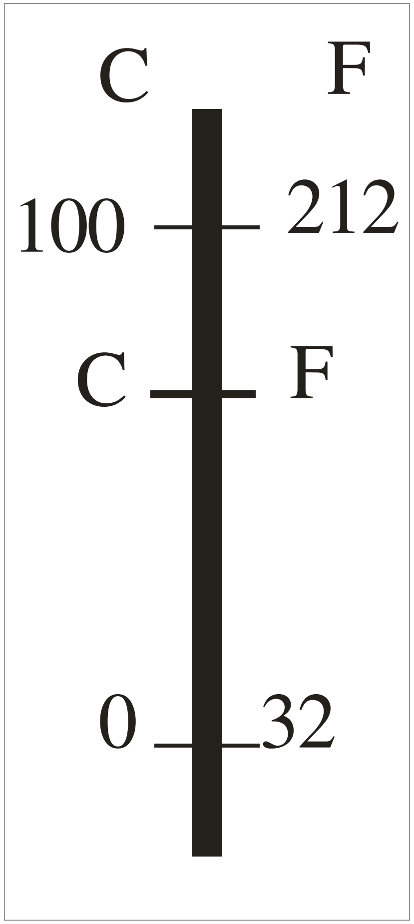
Và vấn đề biến thành : tìm số nguyên n lớn nhất sao cho $3000 \times n \leq 3500000$.

Dùng kỹ thuật làm toán thông thường, bài toán trở thành tìm số n lớn nhất sau cho $n \leq 1166{,}66$.

Vậy ta có lời giải là 1166 quyễn sách.

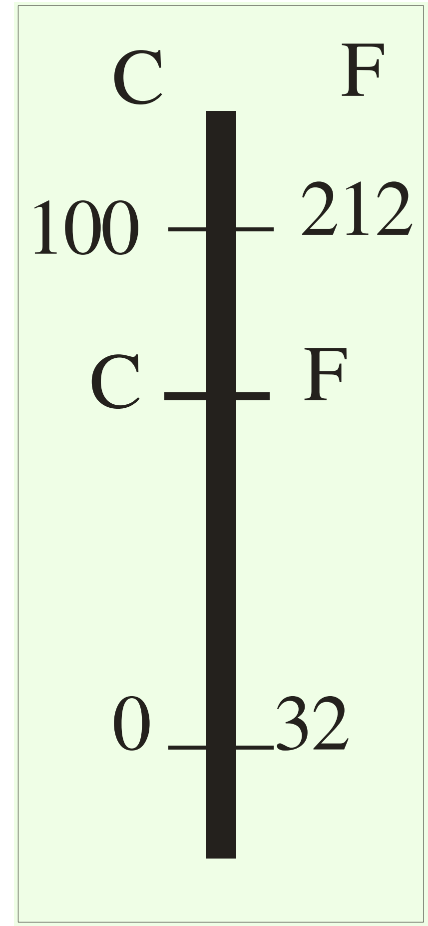
Thí dụ 2. Chúng ta có hai hệ thống đo nhiệt độ : Celcius và Fahrenheit. Nhiệt độ để nước đóng băng là 0^o C và 32^o F, và Nhiệt độ nước lúc bắt đầu sôi là 100^oC và 212^oF.

Để làm một nhiệt kế dùng trong nhà, chúng ta phải lập bảng kê các số đo trong hệ Fahrenheit tương ứng với các số đo từ -20 đến 70 của hệ Celcius,



Đặt *C* và *F* là số đo nhiệt độ của một vật trong hệ Celcius và hệ Fahrenheit. Ta biết: $C=0$ khi $F=32$, và $C=100$ khi . Ta phải tính *F* tương ứng với các trị giá *C* từ -20 đến 70.

Đặt C và F là số đo nhiệt độ của một vật trong hệ Celcius và hệ Fahrenheit. Ta biết: C=0 khi F=32, và C=100 khi . Ta phải tính F tương ứng với các trị giá C từ -20 đến 70.



Ta để ý $$\frac{C-0}{100-0}=\frac{F-32}{212-32}$$

Vậy $$\frac{F-32}{180}=\frac{C}{100}$$ hay $$F=\tfrac{18}{10}C+32$$

C	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20	25	30	35
F	-4	5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95

C	40	45	50	55	60	65	70
F	104	113	122	131	140	149	158

A. TẬP HỢP

Trong việc mô hình như ở các thí dụ trên, chúng ta cần quan tâm đến một vài số nguyên (chứ không phải tất cả các số nguyên). Trong các vấn đề khác cũng vậy, ta phải quan tâm đến một số sự vật có chung vài tính chất nào. Một tập thể một số các sự vật như trên được gọi là một *tập hợp*, và các sự vật đó được gọi chung một tên là "*phần tử*" của tập hợp đó .

Thí dụ : trong bài tính số cây phải trồng dọc theo các con đường, ta phải tìm lời giải trong tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}$

Thí dụ : Trong các bài toán về các chuyển động chúng ta quan tâm đến các yếu tố thời gian, vận tốc và khoảng đường di chuyển, các yếu tố này buộc chúng ta phải xét tập hợp các số thực.

Cho một tập hợp E và một phần tử x của E (ở đây x có thể là một số, một điểm hoặc một dữ liệu), lúc đó ta nói $x \in E$.

Dùng lý thuyết tập hợp chúng ta có thể diễn tả dễ dàng một số sự việc trong toán học. Ngoài ra chúng ta có thể khảo sát cùng một lúc một số vấn đề khác biệt nhau bằng cách sử dụng các khái niệm về tập hợp và ánh xạ.

Thí dụ. Để xét các nghiệm của phương trình

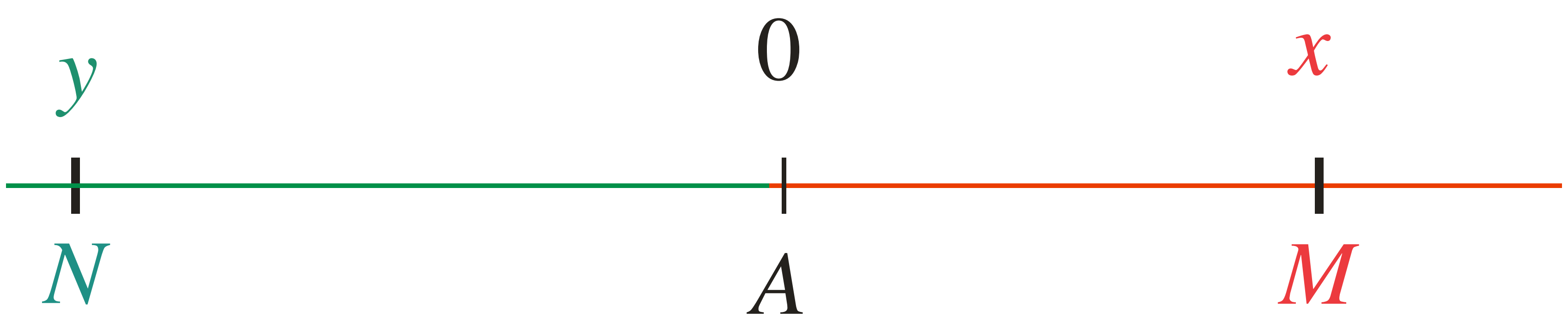
$$x^3 + 4x^2 - 5 = 0,$$

Ta xác định tập hợp $E = \{x : x^3 + 4x^2 - 5 = 0\}$.

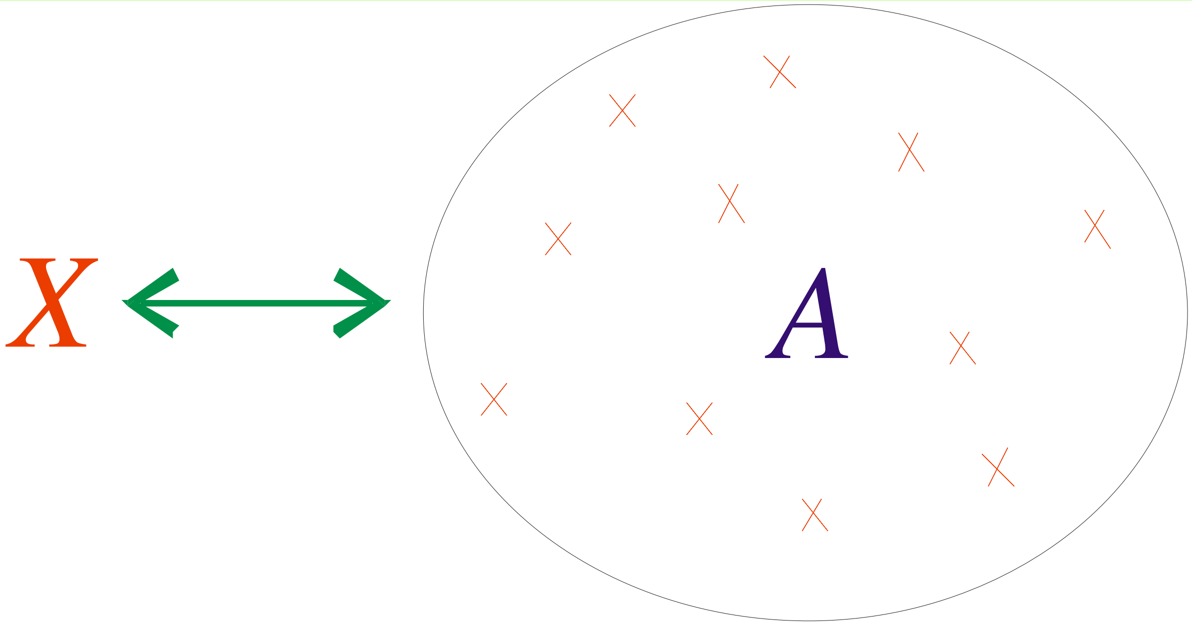
Ta có các tập hợp thông dụng như

- tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,
- tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
- tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}$ và $n \in \mathbb{N}\}$,
- tập hợp các số thực $\mathbb{R}$,
- tập hợp các số phức $\mathbb{C} = \{x + iy : x$ và y trong $\mathbb{R}\}$,
- tập hợp trống ϕ là tập hợp không chứa phần tử nào cả

Ta thường mô hình tập hợp các số thực ℝ như là tập hợp các điểm ở trên một đường thẳng *D*. Số 0 được gán cho một điểm *A* trên đường *D*, một số thực dương *x* được gán cho một điểm *M* nằm phía bên phải *A* trên đường *D* với khoảng cách *AM* = *x*, và một số thực âm *y* được gán cho một điểm *N* nằm phía bên trái *A* trên đường *D* với khoảng cách *NA* = -*y*



Năm 1881, ông John Venn (nhà toán học người Anh) đề xuất việc mô hình một tập hợp *X* như một phần *A của* mặt phẳng giới hạn bởi một đường cong.



Ta gán các phần tử của *X* như là các điểm được đánh dấu trong miền *A* . Tuy nhiên nhiều lúc ta cứ mô hình *X* như miền A, mà không cần đánh dấu các điểm được gán trong *A* .

Mô hình tập hợp như ông Venn làm giản đơn nhiều bài toán, thí dụ một miền *A* trong mặt phẳng có thể mô hình một tập hợp *X* có vài phần tử hoặc tập hợp có rất nhiều phần tử như $\mathbb{R}$.

Ở đây chúng ta thấy toán học nhìn sự vật theo nhiều cách, nếu theo một cách nào đó, *X* và $\mathbb{R}$ chỉ được nhìn theo ý nghĩa tập hợp, thì chúng có thể được đối sữ như nhau và mô hình như nhau!

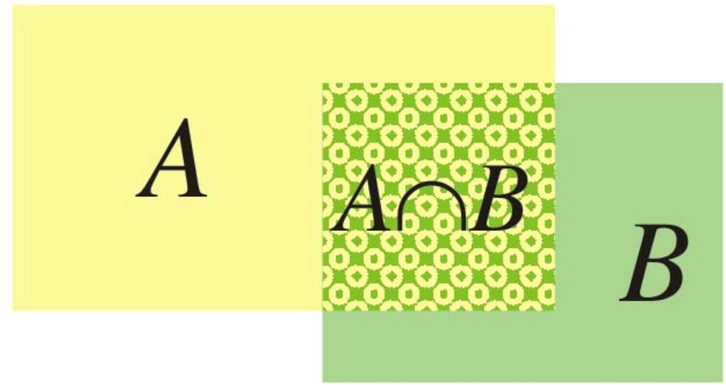
Chúng ta sẽ thấy nhờ tính đồng nhất hóa những sự việc khác nhau như vậy, trong toán có thể có các khái niệm chung cho các sự vật đó như : phần giao, phần hội của các tập hợp .

Cho hai tập hợp A và B. Ta đặt

$E = \{x : x \in A$ và $x \in B\}$,

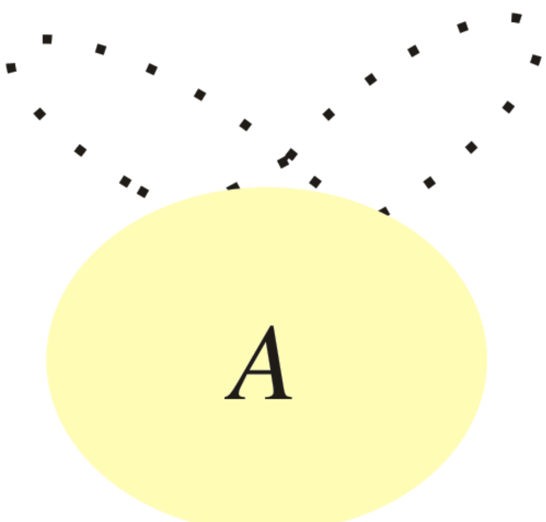
E là phần giao của A và B

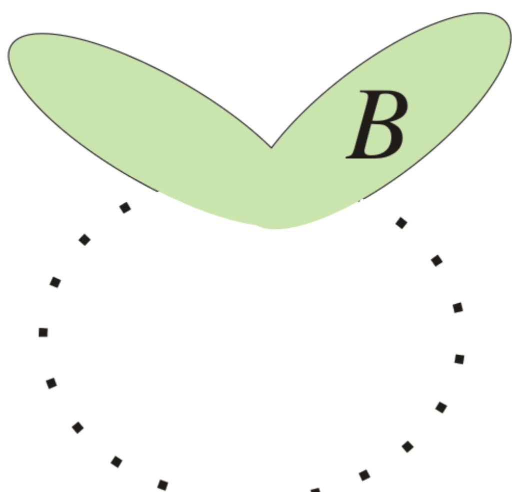
và ký hiệu là $A \cap B$

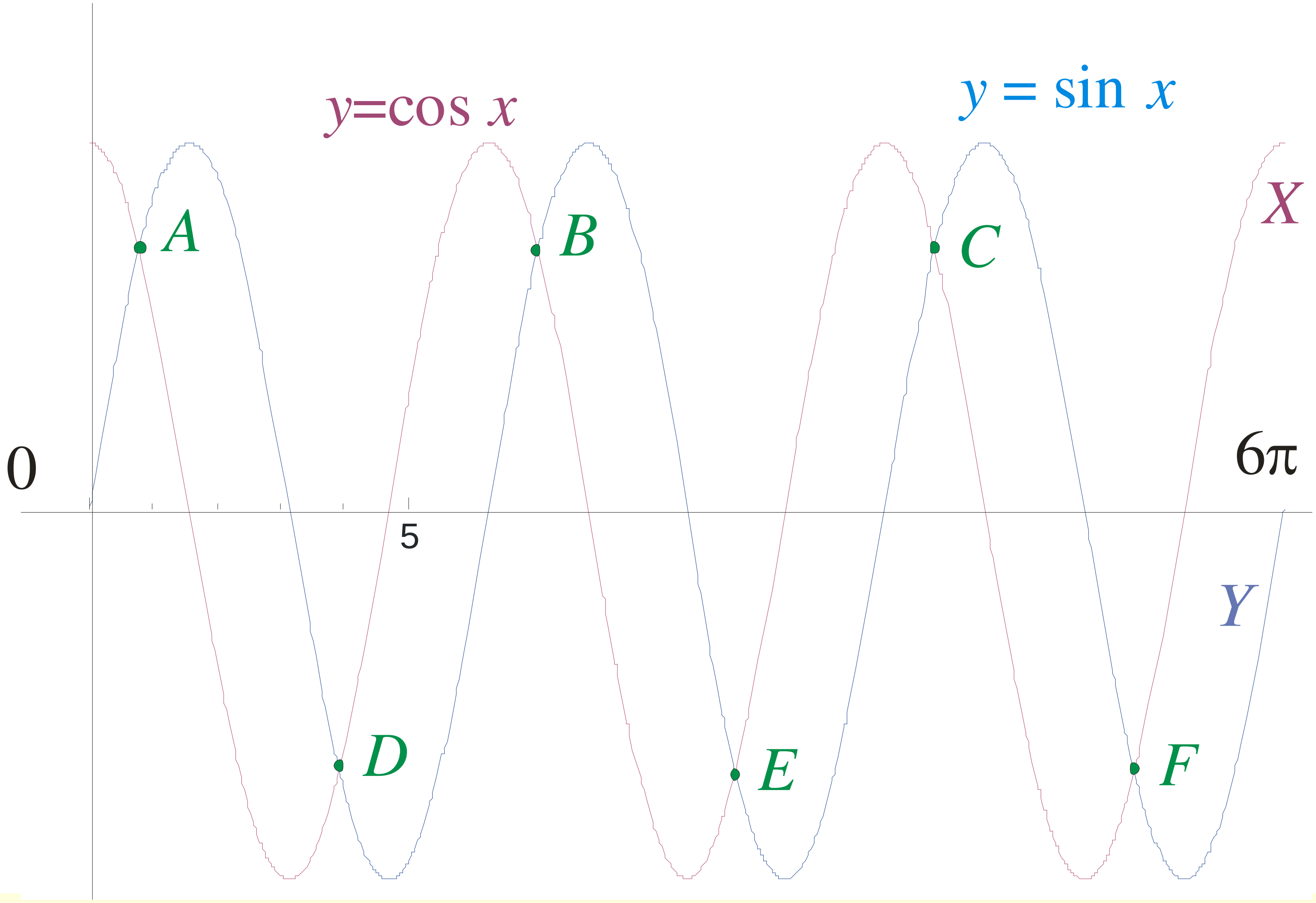


$F = \{x : x \in A$ hoặc $x \in B\}$,

F là phần hợp của A và B và ký hiệu là $A \cup B$.







Đặt X và Y là các đồ thị của các hàm số $y = \cos x$ và $y = \sin x$, với $x \in [0,6\pi]$. Lúc đó $X \cap Y$ là tập hợp gồm các điểm A, B, C, D, E và F. Các điểm chung của các đường thường được gọi là giao điểm.

Thi dụ : Đặt $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin x\pi = 0\}$ và

$$B = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + x - 1 = 0\}.$$

- $A \cap B$ là tập hợp các nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x\pi = 0, \\ 2x^2 + x - 1 = 0. \end{cases}$$

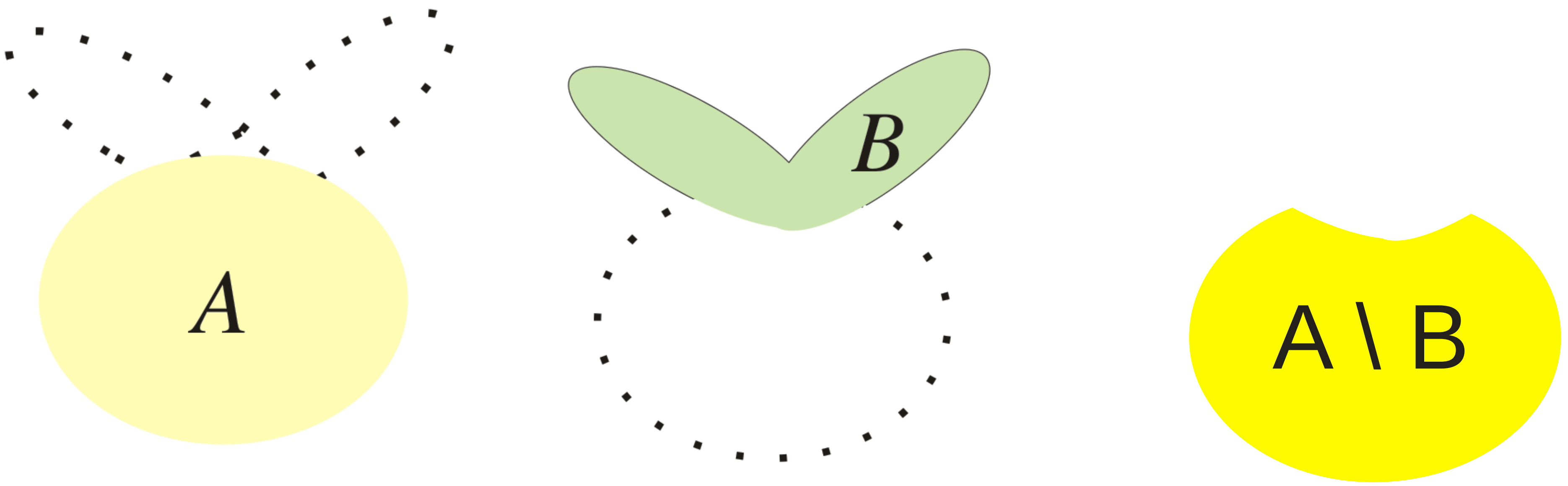
- $A \cup B$ là tập hợp các nghiệm của phương trình

$$(2x^2 + x - 1)\sin x\pi = 0$$

Cho hai tập hợp A và B. Ta đặt

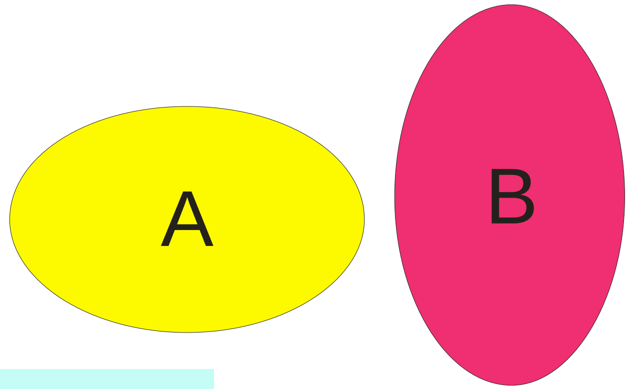
$$G = \{x : x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

Ta ký hiệu G là A \ B .

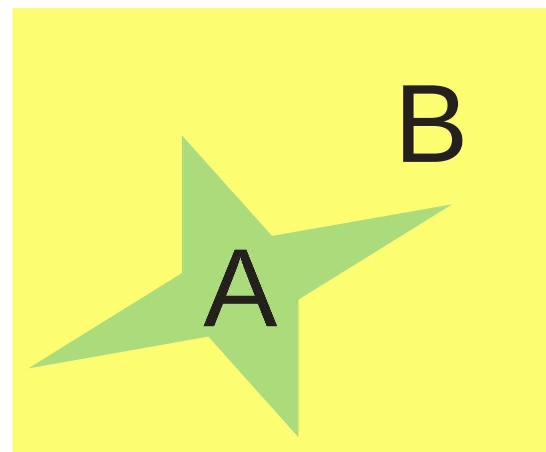


Định nghĩa. Cho hai tập hợp A và B. Ta nói

- A và B rời nhau nếu và chỉ nếu $A \cap B = \phi$,

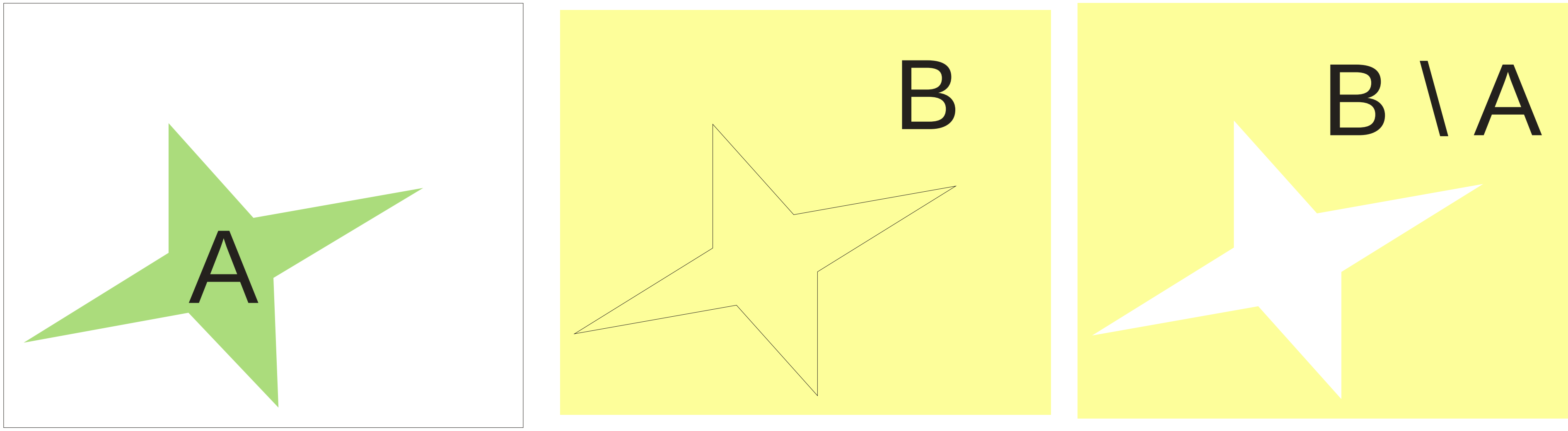


- A chứa trong B nếu và chỉ nếu mọi phần tử của A đều thuộc B (lúc đó ta nói A là tập con của B và ký hiệu $A \subset B$)



- A bằng B nếu và chỉ nếu $A \subset B$ và $B \subset A$, lúc đó ta ký hiệu $A = B$.

Nếu $A \subset B$, ta gọi $B \setminus A$ là phần bù của A trong B.



Cho A là một tập hợp, ta đặt $\mathscr{P}(A)$ là tập hợp tất cả các tập hợp con của A.

Thí dụ : $A = \{\, 2 , a , \bullet \,\}$, lúc đó

$$\mathscr{P}(A) = \{\phi, \{2\}, \{a\}, \{\bullet\}, \{2, a\}, \{2, \bullet\}, \{a, \bullet\}, \{2, a, \bullet\}\}$$

Thí dụ . Gọi A là tập hợp tất cả các linh kiện trong một cửa hàng máy tính trong một ngày nào đó. Một máy tính được lắp ráp bằng các linh kiện này có thể coi như một tập con của A, hay là một phần tử trong $\mathcal{P}(A)$. Đặt $\mathfrak{M}$ là tập hợp các máy tinh được lắp ráp và bán ra trong ngày hôm đó. Lúc đó $\mathfrak{M}$ là một tập con của $\mathcal{P}(A)$.

Thí dụ. Đặt $A = \{0,1,2, . . .,9\}$. Lúc đó $\{1,9,2,4\}$ là một tập con của A, nhưng số 1924 không phải là một tập con của A.

Để khảo sát thiết kế hệ thống máy lạnh trong giảng đường này, chúng ta đo nhiệt độ tại một số vị trí trong giãng đường này (gọi A là tập hợp các vị trí đó) tại một số thời điểm từ 7.00 giờ sáng đến 6.00 giờ chiều trong một ngày nào đó. Lúc đó chúng ta quan tâm cùng một lúc đến hai tập hợp : A và $[6,18]$ (các thời điểm mà ta đo nhiệt độ). Ta mô hình việc này bằng toán như sau.

Định nghĩa. Cho A và B là hai tập hợp, ta đặt tích của A và B là họ tất cả các cặp (x,y) với mọi $x \in A$ và $y \in B$ và ký hiệu nó là $A \times B$.

Thí dụ: $A = \{ 2 , \bullet \}$ và $B = \{@,\#,\&\}$, lúc đó

$A\times B = \{(2, @), (2, \#), (2, \&), (\bullet, @), (\bullet, \#), (\bullet, \&)\}$

$B\times A = \{(@, 2), (@, \bullet), (\#, 2), (\#, \bullet), (\&, 2), (\&, \bullet) \}$

Thí dụ: $A = \{\, 2 , \bullet \,\}$ và $B = \{@, \#, \&\}$, lúc đó

$A \times B = \{(2, @), (2, \#), (2, \&), (\bullet, @), (\bullet, \#), (\bullet, \&)\}$

$B \times A = \{(@, 2), (@, \bullet), (\#, 2), (\#, \bullet), (\&, 2), (\&, \bullet)\}$

A \ B	2	•
&	(2,&)	(•,&)
#	(2,#)	(•,#)
@	(2,@)	(•,@)

B \ A	@	#	&
•	(@,•)	(#,•)	(&,•)
2	(@,2)	(#,2)	(&,2)

Thí dụ: $C = \{ m , n \}$ và $D = \{a, i, ô\}$, lúc đó

$D \times C = \{(a,m), (a, n), (i, m), (i,n), (ô,m), (ô,n) \}$

$C \times D = \{(m,a), (m,i), (m,ô), (n,a), (n,i), (n,ô)\}$

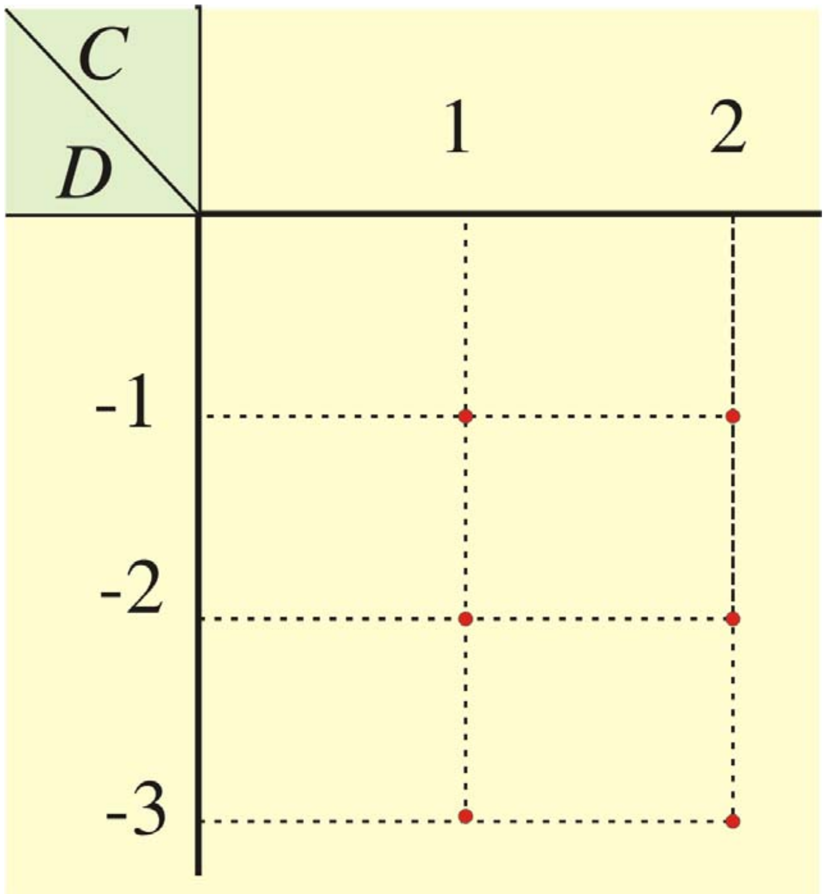
D \ C	a	i	ô
m	am	im	ôm
n	an	in	ôn

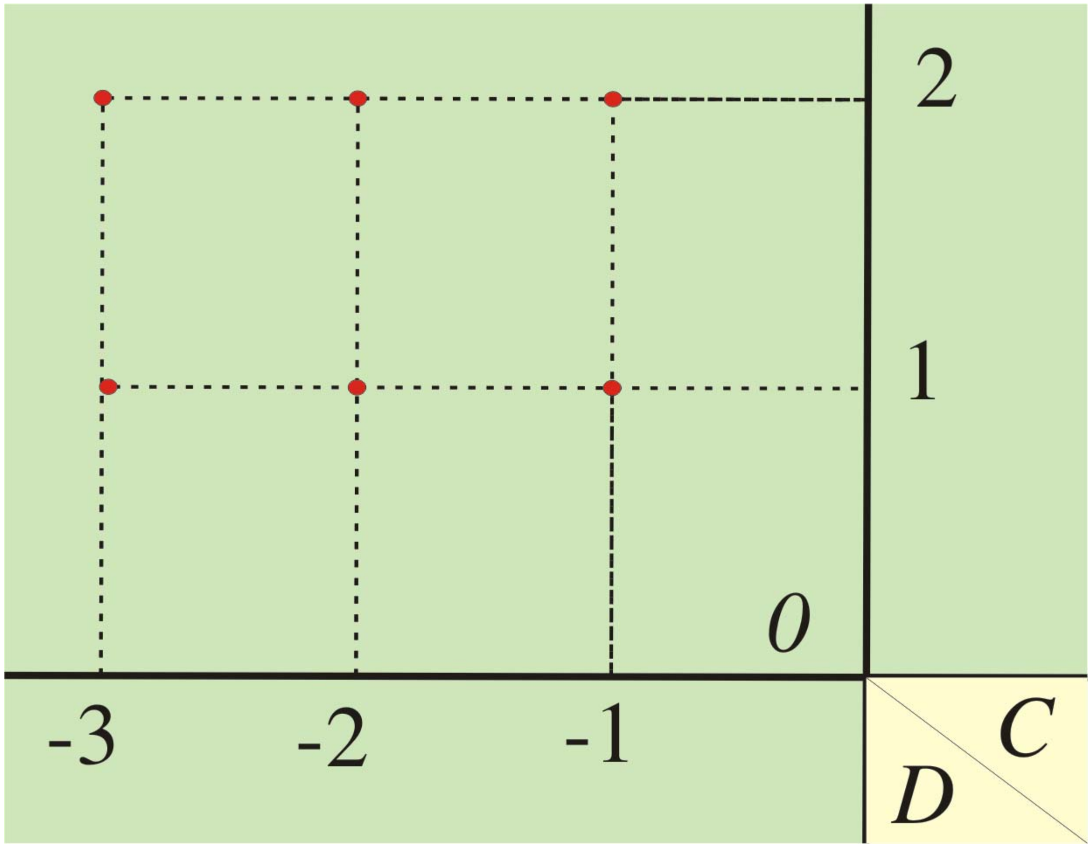
C \ D	m	n
a	ma	na
i	mi	ni
ô	mô	nô

Thí dụ: $C = \{\ 1\ ,\ 2\ \}$ và $D = \{-1,-2,-3\}$, lúc đó

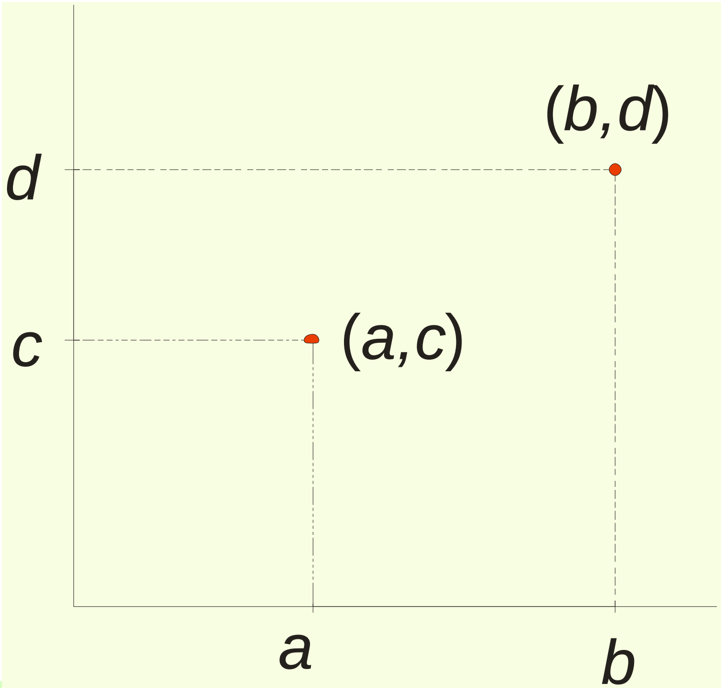
$C \times D = \{(1,-1), (1,-2), (1,-3), (2,-1), (2,-2), (2,-3)\}$

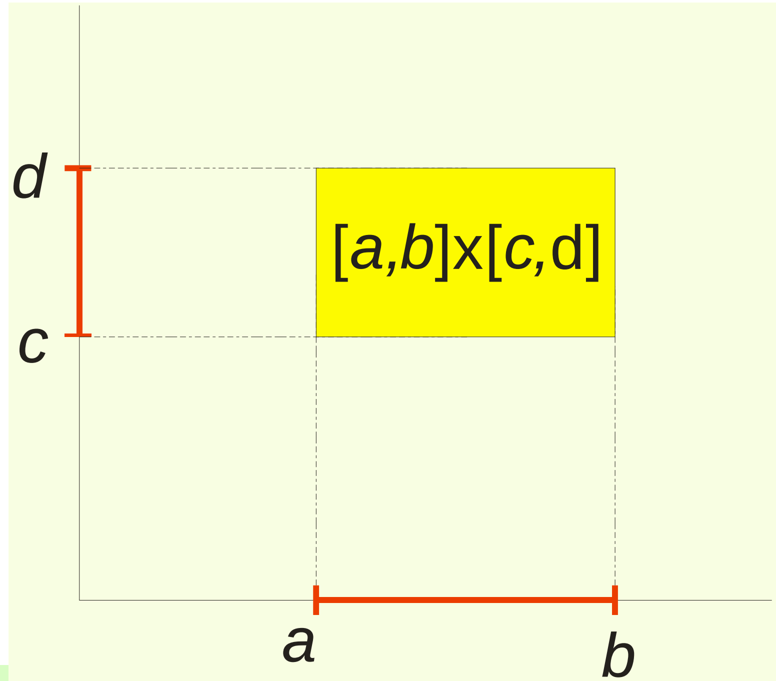
$D \times C = \{(-1, 1), (-1,2), (-2,1), (-2,2), (-3,1), (-3,2)\}$



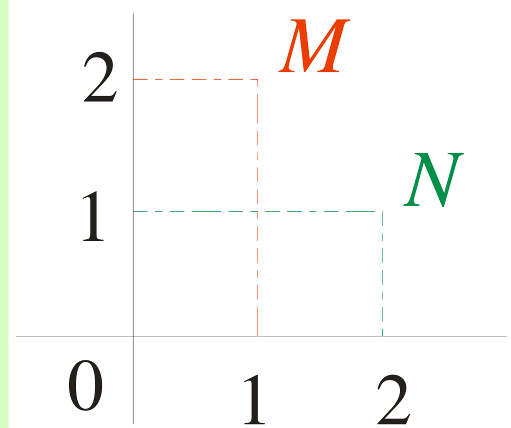


Dùng biểu diễn theo tích Descartes





Nếu $B = A$, ta thường ký hiệu $A \times A$ là A^2. Lúc đó A^2 là họ tất cả các cặp (x,y) với mọi $x \in A$ và $y \in A$, ta phải lưu ý trong trường hợp này là (x,y) có thể khác (y,x), thí dụ như $M = (1,2)$ khác $N = (2,1)$ trong $\mathbb{R}^2$.



Có hai bài toán cơ bản liên quan đến tập hợp : xác định một tập hợp và chứng minh tập hợp này chứa trong một tập hợp khác. Chúng ta xem các phương pháp thông dụng sau đây dùng để giải quyết các vấn đề này .

A.1. Xác định một tập hợp

Để xác định một tập hợp *E* ta có các phương pháp sau :

- **Liệt kê tất cả các phần tử của *E***
- **Định nghĩa lại tập hợp *E* một cách giản dị hơn**
- **Dùng đồ họa để diễn tả tập hợp *E***

- **Liệt kê tất cả các phần tử của *E***

Thí dụ. Xác định các tập hợp :

$$F = \{ x \in \mathbb{N} : 4x^4 - 4x^3 - x^2 + x = 0 \},$$
$$G = \{ x \in \mathbb{Z} : 4x^4 - 4x^3 - x^2 + x = 0 \},$$
$$H = \{ x \in \mathbb{Q} : 4x^4 - 4x^3 - x^2 + x = 0 \},$$
$$K = \{ x \in \mathbb{R} : 4x^4 - 4x^3 - x^2 + x = 0 \}.$$

$$4x^4 - 4x^3 - x^2 + x = x(x-1)(2x-1)(2x+1)$$

Phương trình $4x^4 - 4x^3 - x^2 + x = 0$ có các nghiệm $x = 0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$.

$F = \{1\}$, $G = \{0, 1\}$,

$H = \{0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ và $K = \{0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$.

- Định nghĩa lại tập hợp E một cách giản dị hơn

Thí dụ. *Cho A và B là hai điểm trong một mặt phẳng P. Xác định tập hợp* $E = \{M \in P : \widehat{AMB} = 90^o\}$.

Đặt O là trung điểm của AB. Dùng các kết quả trong hình học phẳng ta thấy E là đường tròn tâm O bán kính OA ở trong P hay $E = \{M \in P : OM = OA\}$.

Thí dụ. *Xác định tập hợp* $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 < 0\}$

Dùng phương pháp xét dấu của tam thức bậc hai ta có $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2) < 0 \iff -2 < x < 1$.

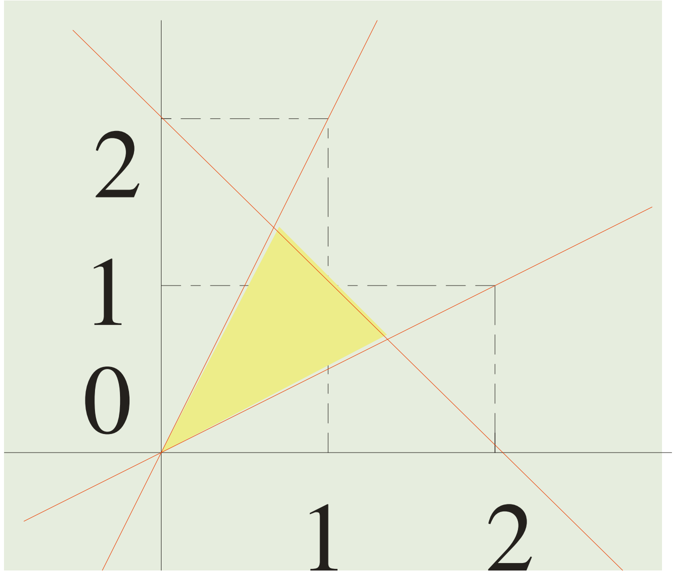
Vậy E là khoảng mở $(-2, 1)$

• Dùng đồ họa để diễn tả tập hợp *E*

Thí dụ. Xác định tập hợp

$$E = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ :\ 2x > y > \frac{x}{2} \text{ và } y - 2 < -x\ \}$$

Dùng phương pháp giải hệ bất phương trình bậc một ở chương trình trung học ta thấy *E* là miền tam giác được tô màu vàng trong hình vẽ.



A.2. Chứng minh tập hợp *A* chứa trong tập hợp *B*

Cho hai tập hợp E và F, để chứng minh $E \subset F$, ta có thể làm như sau

Cho x trong E , chứng minh x thuộc F

<u>Bài toán 1</u>. *Cho A, B và C là ba tập hợp sao cho $A \subset B$ và $B \subset C$. Chứng minh $A \subset C$.*

Cho x trong A , chứng minh x thuộc C

Cho x trong A , ta có x thuộc B

Cho x trong B , ta có x thuộc C

Với A={ông Socrate}, B là tập hợp tất cả loài người, và C là tập hợp các sinh vật có đời sống hữu hạn. Chứng minh trên là mẫu của tam đoạn luận Aristot.

B.QUAN HỆ TRONG MỘT TẬP HỢP

Trong các động cơ nhiệt hay động cơ nổ chúng ta cần các hệ thống piston và cylinder, kích cở của piston phải tương thích với kích cở của cylinder : kích cở của piston phải nhỏ hơn hẵn kích cở của cylinder, để piston có thể chuyển động với ma sát nhỏ trong vận tốc nhanh trong cylinder, nhưng không được quá nhỏ để có thể tạo lực nén trong cylinder. Ta có thể mô hình toán học như sau: gọi r là đường kính của lòng trong cylinder và s đường kính của piston, ta phải có $0,998r \le s \le 0,999r$.

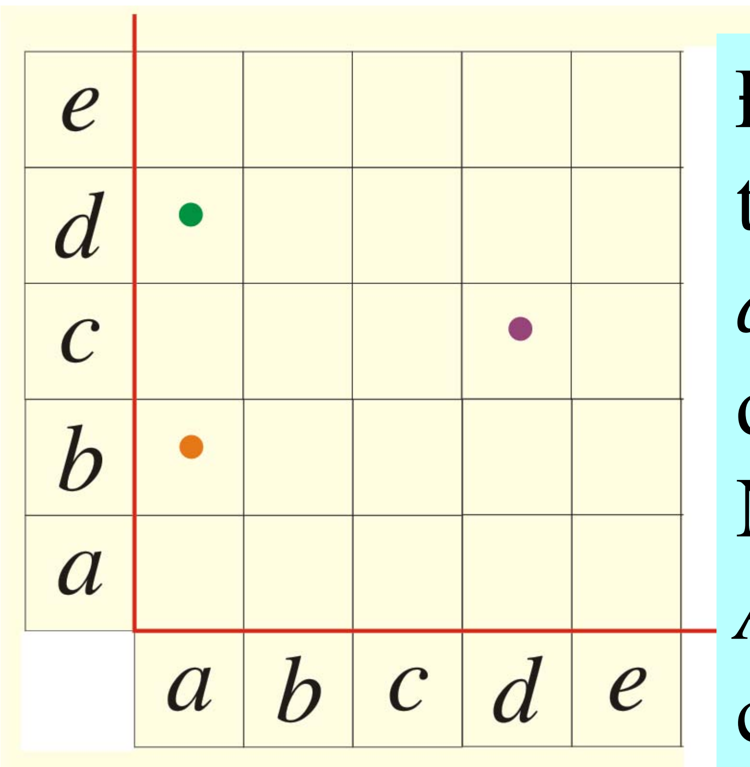
Như vậy chúng ta cần một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}$.

Trong nông lâm ngư nghiệp chúng ta thấy công việc thường tùy vào thời vụ, thí dụ không thể trồng lúa vào các mùa quá khô hạn được. Để mô hình các vấn đề này chúng có thể làm như sau: nếu lấy đơn vị là tháng, và m và n là hai tháng cho khởi sự một loại thời vụ, ta phải có một số nguyên (dương hay âm k sao cho $n - m = 12k$.

Như vậy chúng ta phải xét một quan hệ tương đương trên tập hợp $\mathbb{N}$:

$n \sim m$ nếu và chỉ nếu có $k \in \mathbb{Z}$ để cho $n - m = 12k$

Cho A là một tập thể nho nhỏ nào đó của loài người. Trong tập hợp A có thể có các mối liên hệ khác nhau, có thể cô x và anh y trong tập thể A này có dính dáng với nhau trong mối liên hệ này nhưng chẳng dính dáng với nhau trong quan hệ khác.

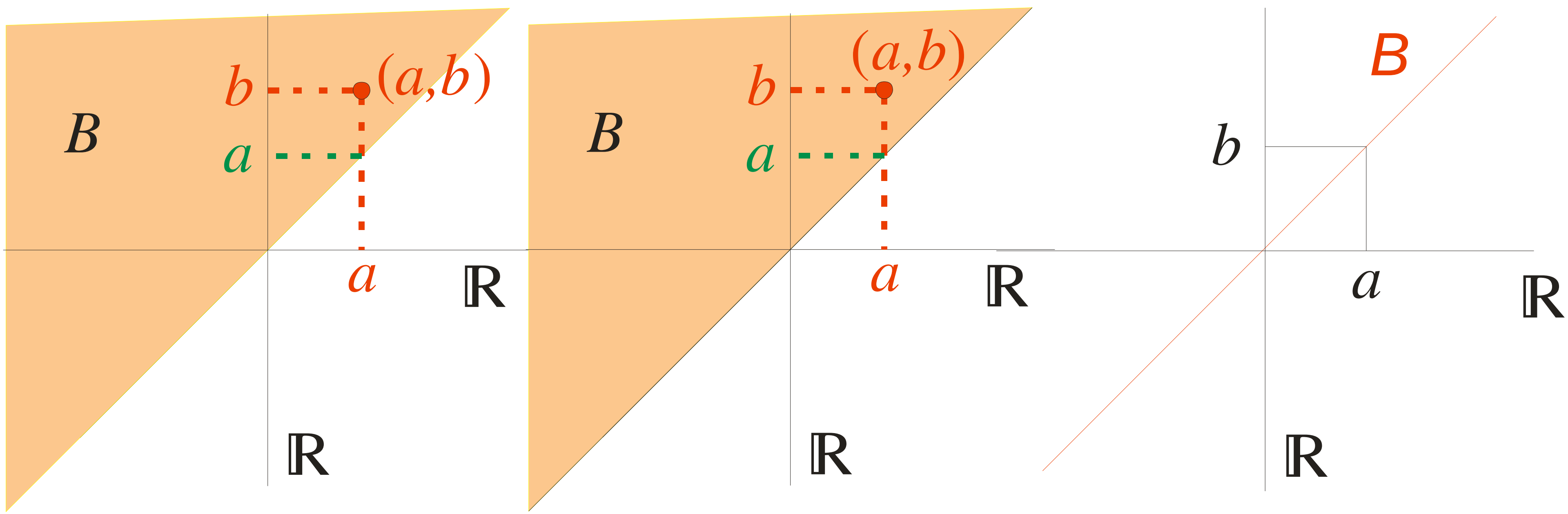


Để mô hình một mối liên hệ trong tập A, ta làm như sau: nếu a và b liên hệ với nhau, ta chấm điểm (a,b) lên trên tập tích $A\times A$. Như vậy một mối liên hệ trong A có thể mô hình bằng một tập con trong $A\times A$

Định nghĩa. Cho một tập hợp A khác trống và cho B là một tập con khác trống trong $A\times A$. Ta nói

$$x\,\mathscr{R}\,y \quad \text{nếu và chỉ nếu} \quad (x,y) \in B.$$

Lúc đó ta gọi $\mathscr{R}$ là một quan hệ trong A.



$B=\{(x,y) : x<y\}$

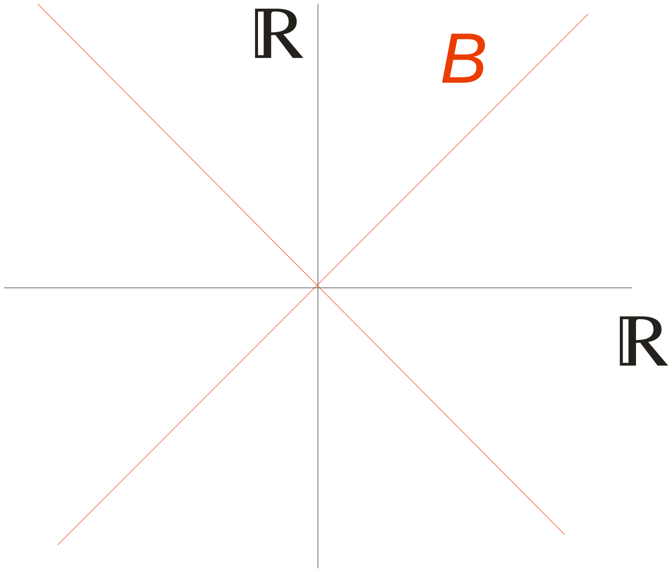
$a\,\mathscr{R}\,b \Leftrightarrow a < b$

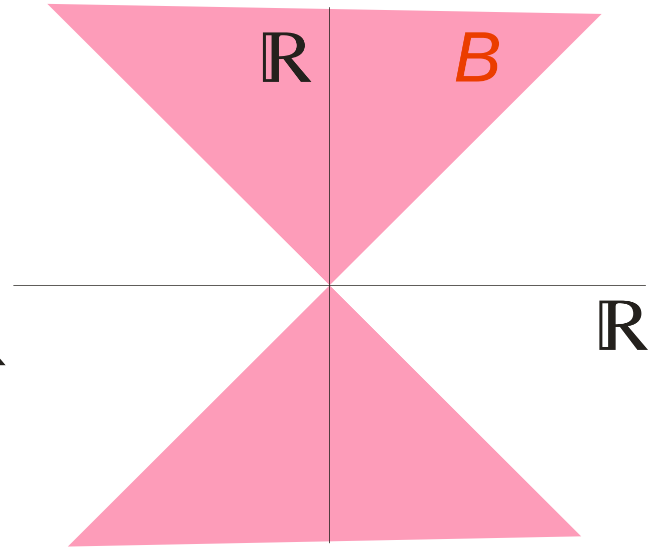
$B=\{(x,y) : x\leq y\}$

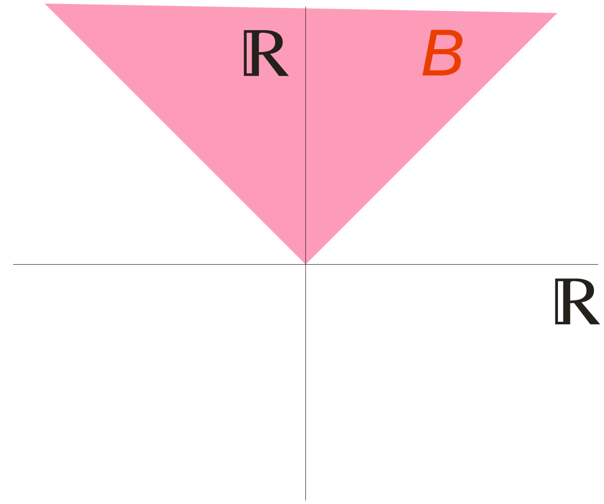
$a\,\mathscr{R}\,b \Leftrightarrow a \leq b$

$B=\{(x,y) : x= y\}$

$a\,\mathscr{R}\,b \Leftrightarrow a = b$



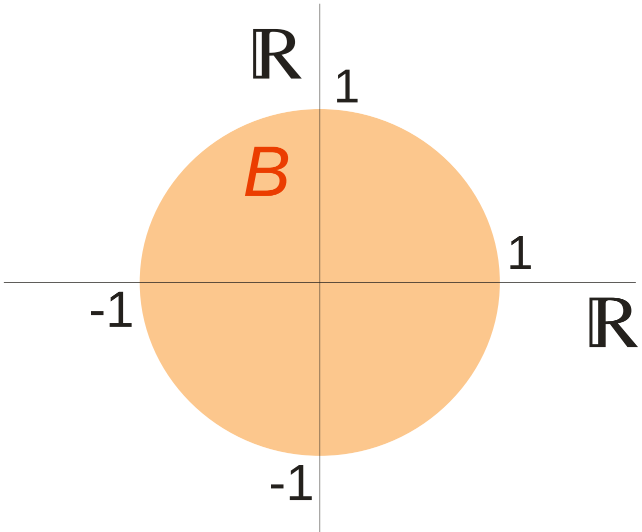


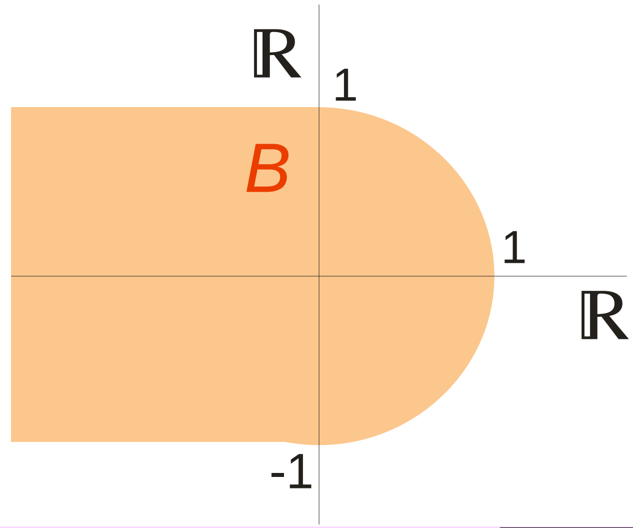


$$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow |a|=|b|$$

$$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow |a|<|b|$$

$$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow |a| < b$$





$$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow |a|<\sqrt{1-b^2}$$

$$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a<\sqrt{1-b^2}$$

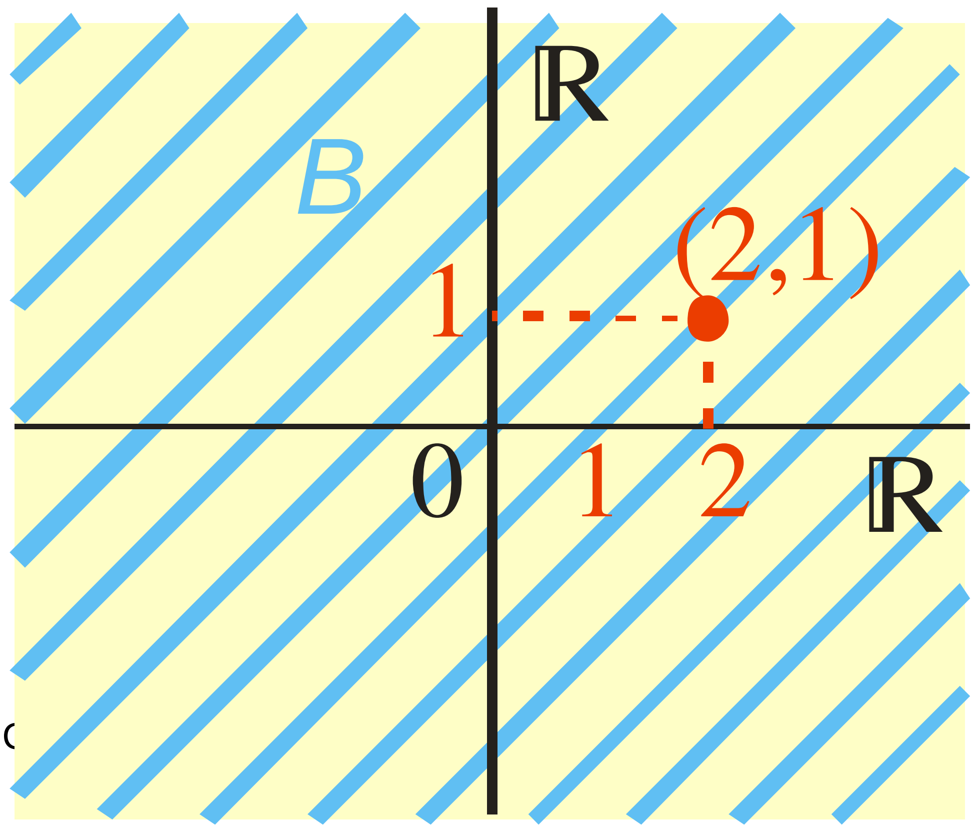
Trong thực tế ta hầu như không nhắc đến tập B khi định nghĩa một quan hệ. Thí dụ cho X là một tập hợp khác trống. Đặt A là $\mathscr{P}(X)$, họ các tập hợp con của X. Ta có thể đặt quan hệ sau đây : $C \mathscr{R} D \Leftrightarrow C \subset D$

Quan hệ $\mathscr{R}$ tương ứng tập $B = \{(C,D) \in A\times A : C \subset D\}$

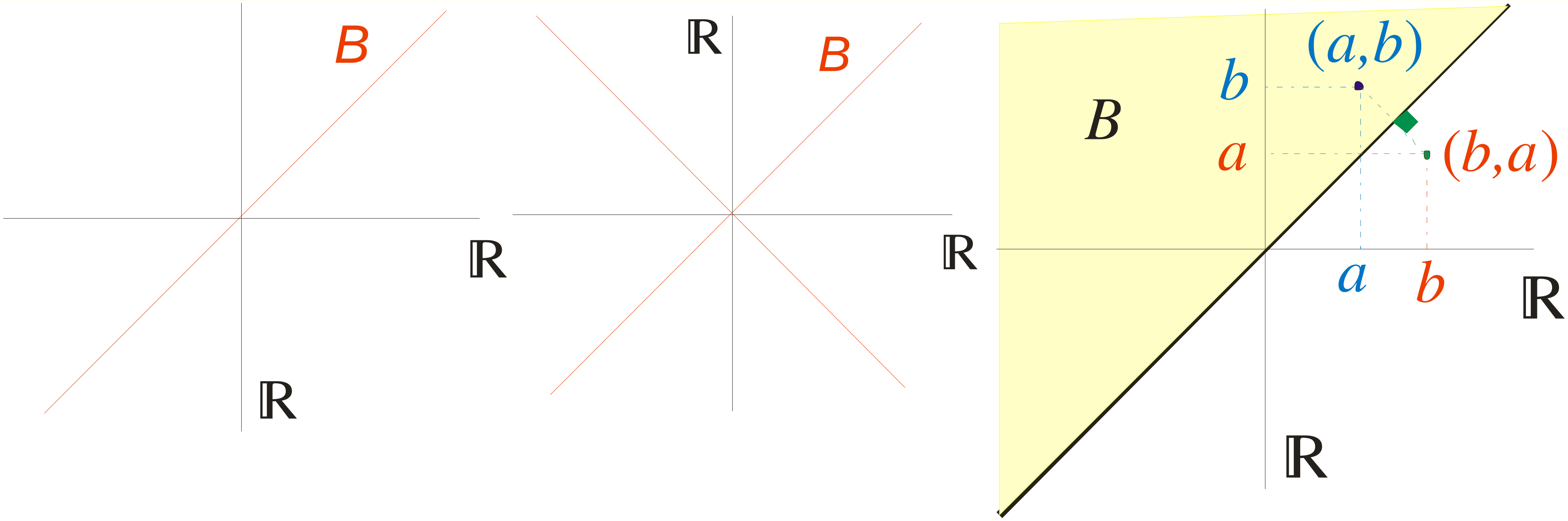
Tuy nhiên, với định nghĩa quan hệ bằng các tập hợp B trong $A\times A$, ta có các quan hệ không thông thường.

$$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow$$

$$\exists\, m \in \mathbb{Z},\ a = b + m$$



- Quan hệ $\mathscr{R}$ đối xứng nếu và chỉ nếu "$x \mathscr{R} y$ *thì* $y \mathscr{R} x$"

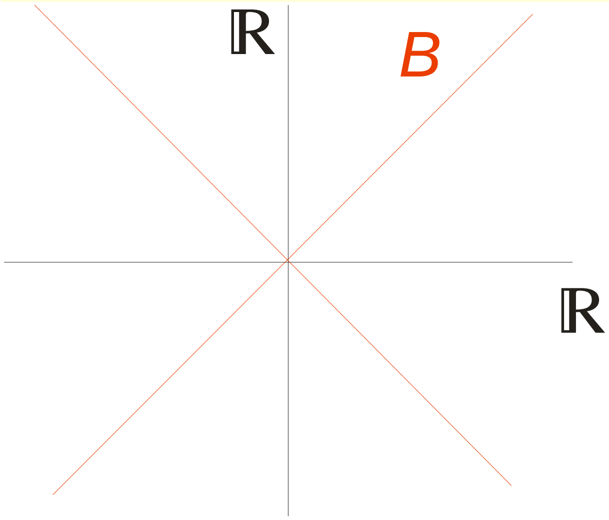


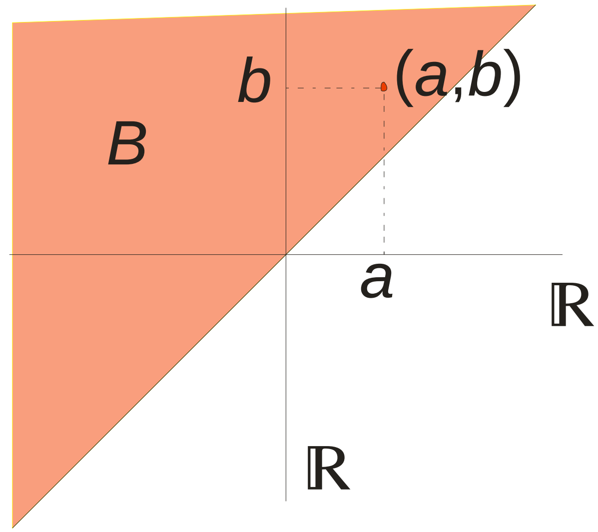
$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a = b$ đối xứng	$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow \lvert a\rvert=\lvert b\rvert$ đối xứng	$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a \leq b$ không đối xứng

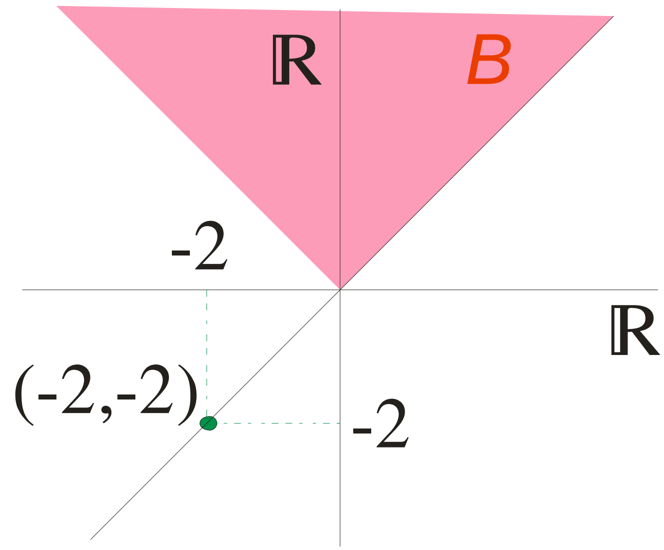
Để cho quan hệ $\mathscr{R}$ đối xứng, ta thấy B phải đối xứng qua đường chéo của $A\times A$.

- Quan hệ $\mathscr{R}$ phản xạ nếu và chỉ nếu

"$x \mathscr{R} x$ với mọi $x \in A$"





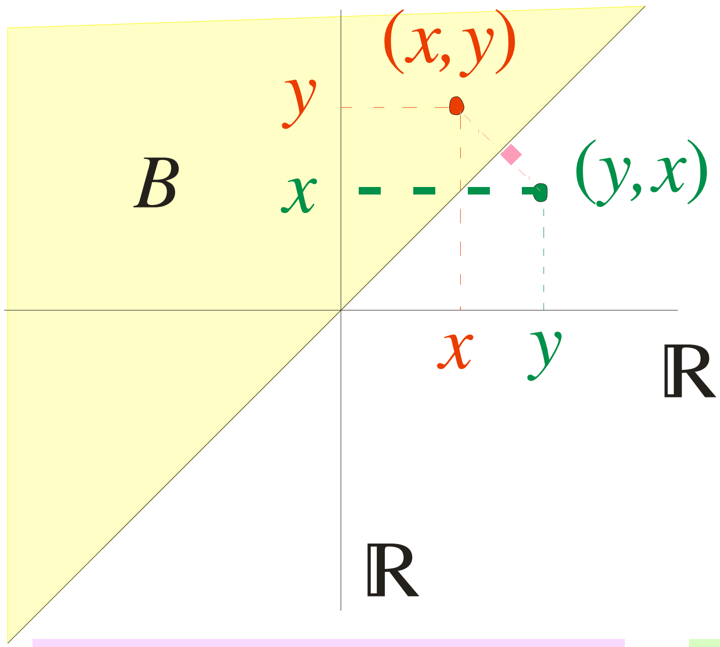


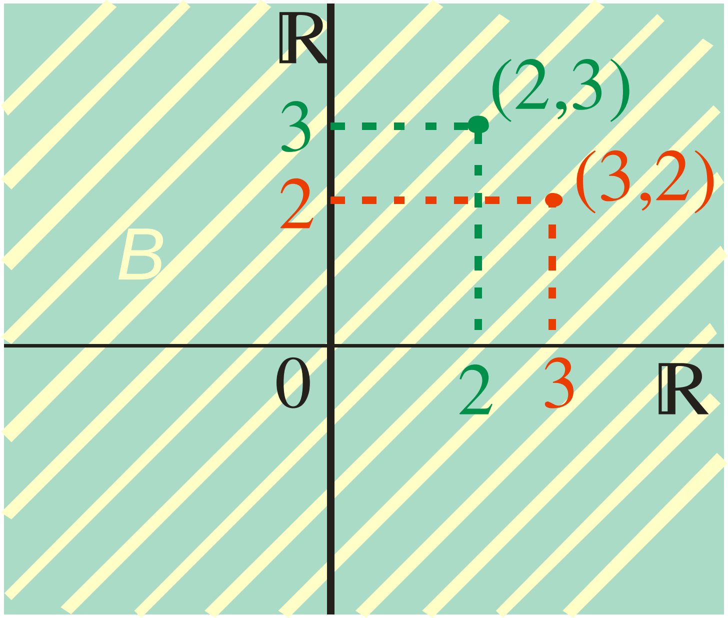
$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow \lvert a \rvert = \lvert b \rvert$ phản xạ	$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a \leq b$ phản xạ	$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow \lvert a \rvert < b$ không phản xạ

Để cho quan hệ $\mathscr{R}$ phản xạ , ta thấy B phải chứa đường chéo của $A \times A$.

•Quan hệ $\mathscr{R}$ phản đối xứng nếu và chỉ nếu

"$x\mathscr{R}y$ và $y\,\mathscr{R}\,x$ thì $x = y$"





$a\,\mathscr{R}\,b \Leftrightarrow a \le b$

phản đối xứng

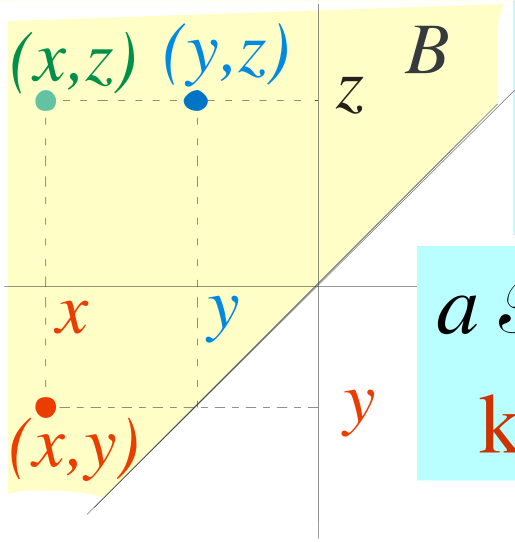
$a\,\mathscr{R}\,b \Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z},\quad a = b + m$

không phản đối xứng

Để cho quan hệ $\mathscr{R}$ phản đối xứng, ta thấy $B \cap B'$ phải chứa trong đường chéo của $A \times A$, ở đây B' là đối xứng của B qua đường chéo của $A \times A$.

- Quan hệ $\mathscr{R}$ truyền nếu và chỉ nếu

"$x \; \mathscr{R} \; y$ và $y \; \mathscr{R} \; z$ thì $x \; \mathscr{R} \; z$"

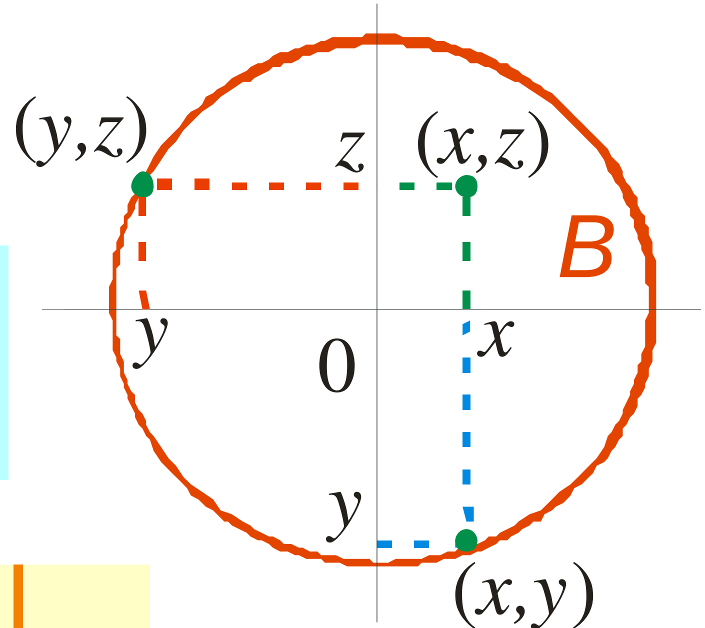


$a \, \mathscr{R} \, b \Leftrightarrow a \leq b$

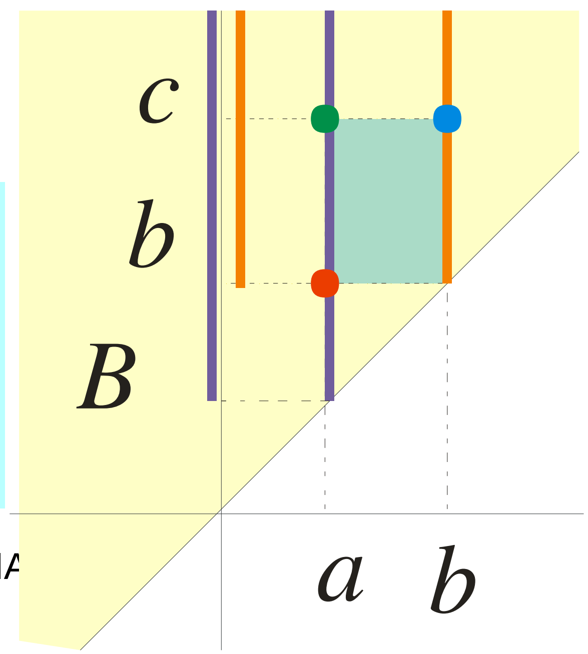
truyền

$a \, \mathscr{R} \, b \Leftrightarrow | \, a \, | = \sqrt{1 - b^2}$

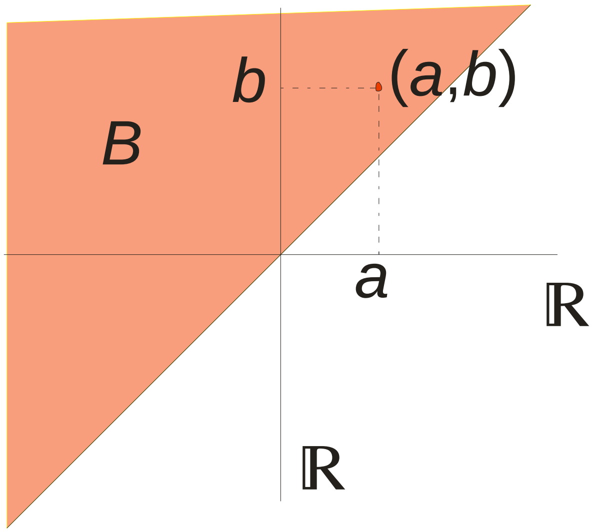
không truyền



$\mathscr{R}$ truyền trong trường hợp B có tính chất như sau

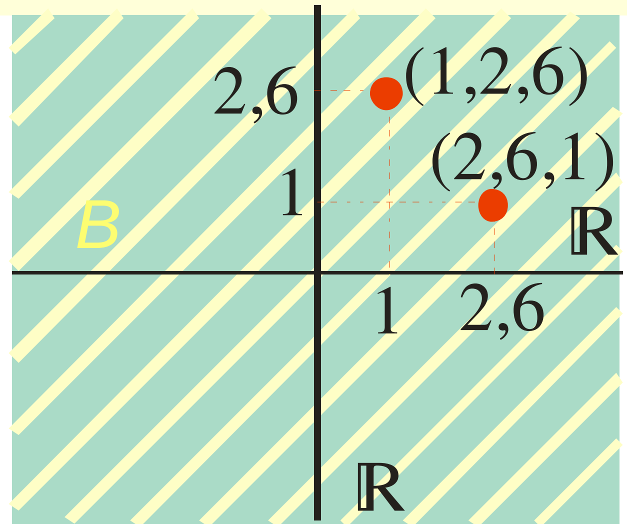


• Quan hệ $\mathscr{R}$ toàn phần nếu và chỉ nếu " với mọi x và y trong A thì hoặc $x \,\mathscr{R}\, y$ hoặc $y \,\mathscr{R}\, x$"



$a \,\mathscr{R}\, b \Leftrightarrow a \le b$

toàn phần



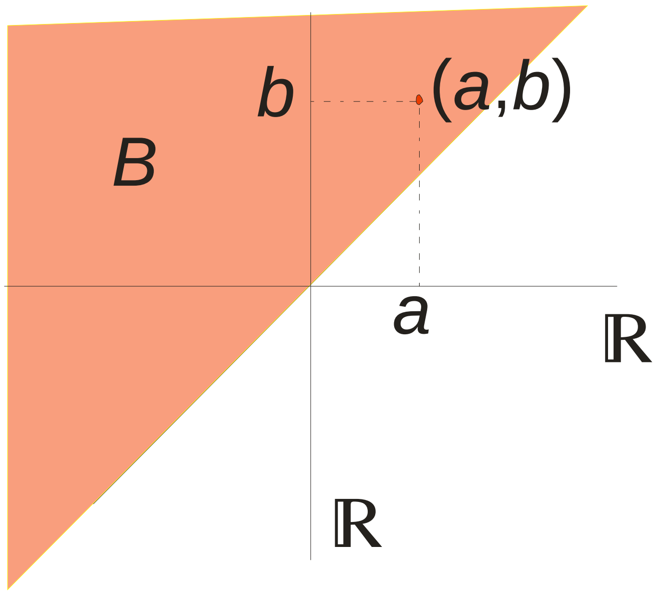
$a \,\mathscr{R}\, b \Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z}$,

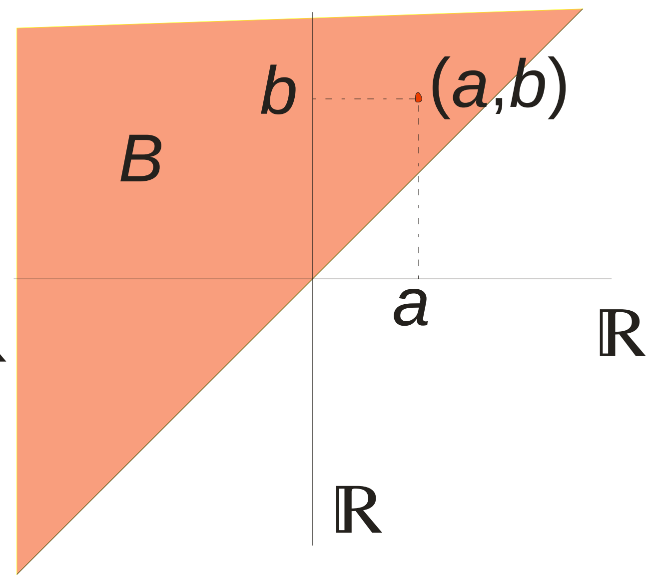
$a = b + m$

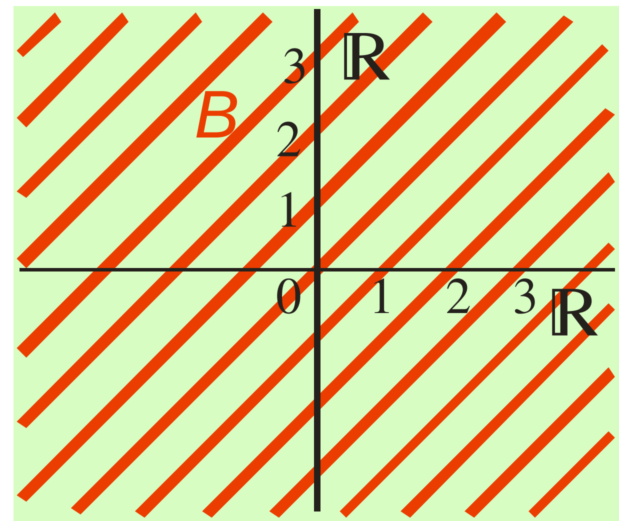
không toàn phần

Để cho quan hệ $\mathscr{R}$ toàn phần , ta thấy $B \cup B'$ phải bằng $A \times A$, ở đây B' là đối xứng của B qua đường chéo của $A \times A$.

Quan hệ $\mathscr{R}$ là một quan hệ thứ tự nếu và chỉ nếu $\mathscr{R}$ phản xạ, phản đối xứng và truyền.







$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a < b$

không là

quan hệ thứ tự

$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a \leq b$

là

quan hệ thứ tự

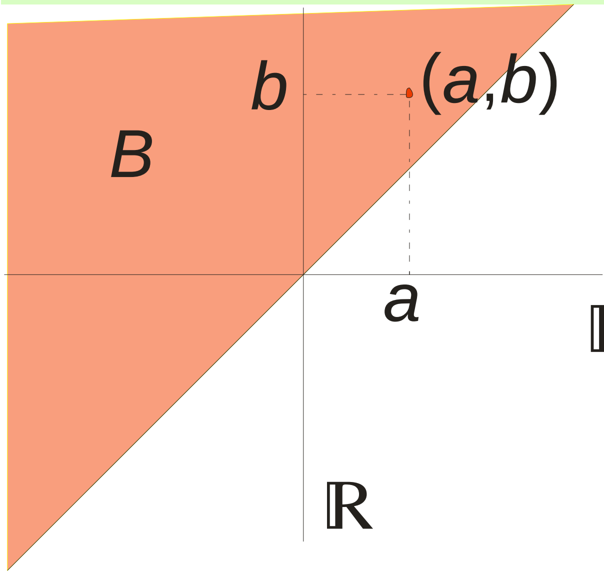
$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z}$

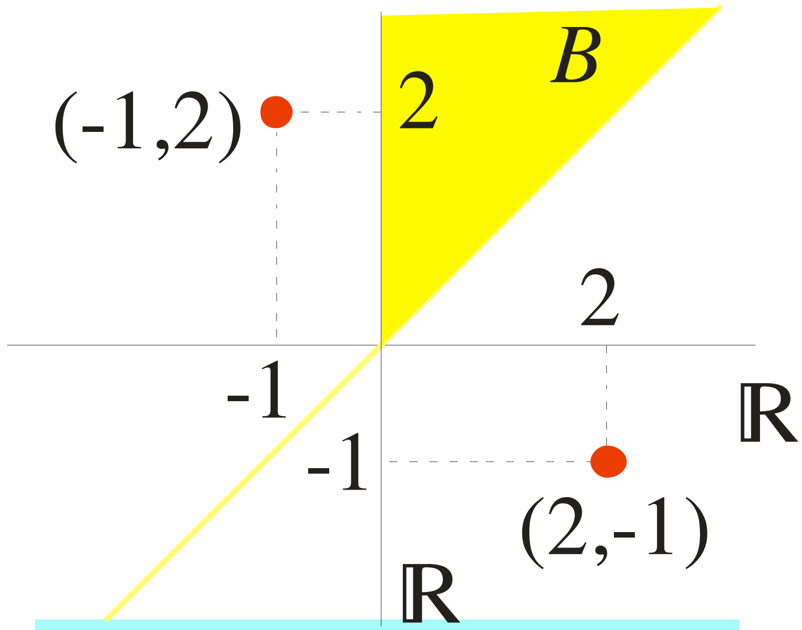
$a = b + m$

không là

quan hệ thứ tự

Quan hệ $\mathscr{R}$ là một quan hệ thứ tự toàn phần nếu và chỉ nếu $\mathscr{R}$ phản xạ, phản đối xứng, truyền và toàn phần.





$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a \le b$

là

quan hệ thứ tự toàn phần

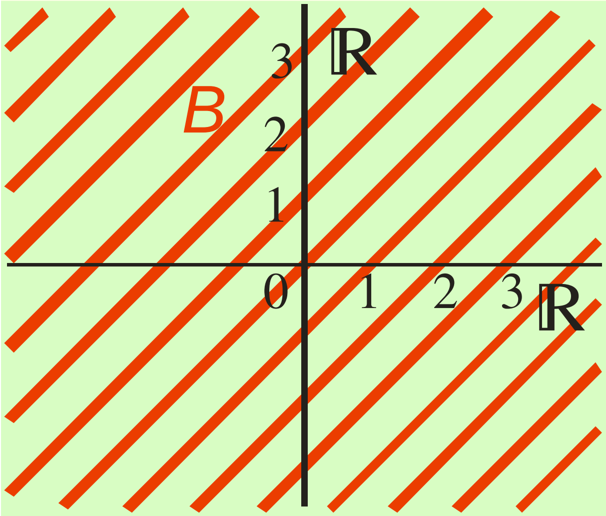
$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a = b$

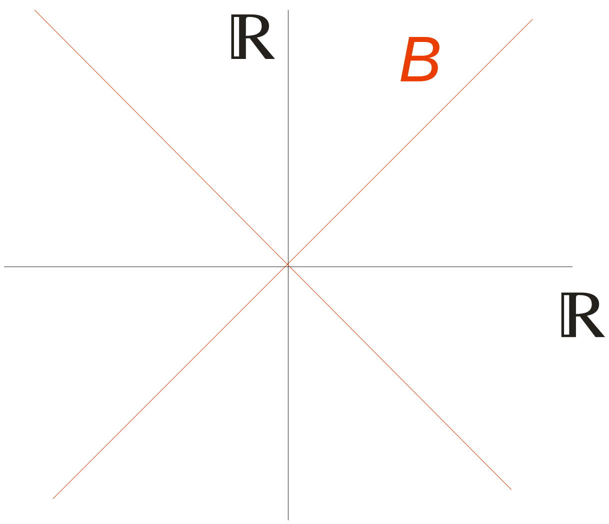
hoặc $0 \le a \le b$ là

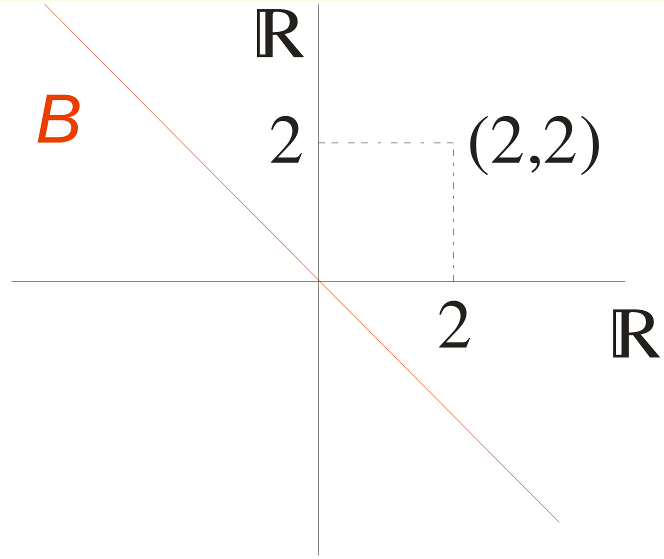
quan hệ thứ tự

không toàn phần

Quan hệ $\mathscr{R}$ là một quan hệ tương đương nếu và chỉ nếu $\mathscr{R}$ phản xạ, đối xứng và truyền







$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow$
$\exists\, m \in \mathbb{Z}$,
$a = b + m$
là một quan hệ tương đương

$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow |a| = |b|$
là một quan hệ tương đương

$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a = -b$
không là một quan hệ tương đương

C. Mệnh Đề toán học

Sau khi mô hình toán học, chúng phải rời bỏ khung trời thực tiễn và bước vào thế giới toán học, ở đó chúng ta phải dùng ngôn ngữ đặc thù toán học.

Một mệnh đề P có ý nghĩa *toán học* nếu và chỉ nếu hoặc là P đúng hoặc là P sai (nghĩa là không có trường hợp P vừa đúng vừa sai cũng như không có trường hợp P vừa không đúng vừa không sai)

Cho $x \in \mathbb{R}$ và đặt P là "$x^7 + x + 7 = 0$", thì P là một mệnh đề toán học.

Cho ε là một số thực dương, cho x và y trong $\mathbb{R}$ và đặt P là "$|y - x| < \varepsilon$", thì P là một mệnh đề toán học.

Xét mệnh đề R là “Tôi nói dối”.

Mệnh đề R không thể đúng (vì nếu đúng thì tôi đang nói một sự thật, làm sao mà nói dối được)

Mệnh đề R cũng không sai (vì nếu nó sai, thì tôi không nói dối, và câu nói “Tôi nói dối” phải là sự thật và phải đúng).

Nếu P là một mệnh đề toán học thì mệnh đề “P sai” cũng là một mệnh đề toán học và ta ký hiệu nó là $\sim P$.

Ta gọi $\sim P$ là *phủ định* của P.

Cho A là một tập hợp. Ta ký hiệu

- "*với mọi phần tử x trong A*" là " $\forall x \in A$ ",
- "*có một phần tử x trong A*" là " $\exists x \in A$ ".

Ta thử xem tác động của phủ định đến $\forall$ và $\exists$:

Q : " $\forall x \in A$ thì P đúng đối với x ".

$\sim Q$: " $\exists x \in A$ sao cho $\sim P$ đúng đối với x ".

Cho A là một tập con của $\mathbb{R}$, và P là " ≤ 4 "

Q : " $\forall x \in A$ thì $x \leq 4$ ".

$\sim Q$: " $\exists x \in A$ sao cho $x > 4$ ".

R : " $\exists\, x \in A$ sao cho P đúng đối với x "

$\sim R$: " $\forall\, x \in A$ thì $\sim P$ đúng đối với x "

Cho A là một tập con của $\mathbb{R}$, và P là " < 4 "

R : " $\forall\, x \in A$ thì $x < 4$ ".

$\sim R$: " $\exists\, x \in A$ sao cho $x \geq 4$ ".

S : " $\exists\, x \in A$ sao cho $P(x)$ đúng đối với z , $\forall z \in B$ "

Ở đây $P(x)$ là một mệnh đề được xác định tùy theo các giá trị của x

$\sim S$:" $\forall\, x \in A\ \exists\, z \in B$ sao cho $\sim P(x)$ đúng đối với z"

Cho B là một tập khác trống trong $\mathbb{R}$, $A = [0 , 1]$ và

$P(x)$ là " $< x$ "

S : " $\exists\, x \in A$ sao cho $z < x$, $\forall z \in B$ "

$\sim S$: " $\forall\, x \in A\ \exists\, z \in B$ sao cho $z \geq x$ "

T : "$\forall\, x \in A, \exists\, y \in B$ sao cho $P(x)$ đúng đối với z ,

$\forall\, z \in C(y)$ "

Ở đây $C(y)$ là một tập hợp được xác định tùy theo các giá trị của y

$\sim T$:" $\exists\, x \in A$ sao cho $\forall\, y \in B$, $\exists\, z \in C(y)$ để cho $\sim P(x)$ đúng đối với z ."

Cách viết một mệnh đề U thành dạng cơ bản

■ Để ý đến các cụm từ *"với mọi"* và *"có một" ở trong* U, và viết chúng thành một trong bốn dạng nêu trên. Nếu cần ta đặt thêm các tập hợp mới.

Cho các tập hợp C, D, E, F và G, ta đặt

$A = C \times D$ và $B = E \times F \times G$ và viết

- "$\forall\, x \in C, \forall\, y \in D$" thành "$\forall (x,y) \in A$".
- "$\exists\, u \in E, \exists\, v \in F$ và $\exists\, t \in G$" thành "$\exists\, (u,v,t) \in B$"

■ Gom các mệnh đề toán còn lại trong U thành một mệnh đề P.

■ Viết U thành các dạng cơ bản ở trên.

Cách phủ định các mệnh đề ở dạng cơ bản

- đổi $\exists$ thành $\forall$
- đổi $\forall$ thành $\exists$
- đổi P thành $\sim P$
- để nguyên "$\in$"
- để nguyên " *đúng với*"

Bài toán 2. Viết mệnh đề sau đây ra dạng cơ bản :

" với mọi số thực dương ε có một số nguyên N sao cho

$|a_m - a_n| < \varepsilon$ với mọi số nguyên dương m và $n \geq N$ "

Từ đó suy ra phủ định của câu trên.

$\forall \varepsilon \in (0, \infty).\ \exists N \in \mathbb{N}$ sao cho

$|a_m - a_n| < \varepsilon \qquad \forall m$ và $n \geq N$

$P(\varepsilon)$ là : "$|a_m - a_n| < \varepsilon$ "

$\forall \varepsilon \in (0, \infty),\ \exists N \in \mathbb{N}$ sao cho

$P(\varepsilon)$ đúng với mọi $m,\ n \in \{k \in \mathbb{N} : k \geq N\}$

$P(\varepsilon)$ là : "$|a_m - a_n| < \varepsilon$"

$\forall \ \varepsilon \in (0,\infty)$, $\exists N \in \mathbb{N}$ sao cho

$P(\varepsilon)$ đúng với mọi $m, n \in \{k \in \mathbb{N} : k \geq N\}$

$$C(N) = \{k \in \mathbb{N} : k \geq N\} \times \{k \in \mathbb{N} : k \geq N\}$$

$\forall \ \varepsilon \in (0, \infty)$, $\exists N \in \mathbb{N}$ sao cho

$P(\varepsilon)$ đúng với (m, n) $\forall \ (m, n) \in C(N)$

$\exists \ \varepsilon \in (0, \infty)$ sao cho $\forall \ N \in \mathbb{N}$, $\exists \ (m, n) \in C(N)$

để cho $\sim P(\varepsilon)$ đúng với (m, n)

$P(\varepsilon)$ là : "$| a_m - a_n | < \varepsilon$"

$\exists\ \varepsilon \in (0, \infty)$ sao cho $\forall\ N \in \mathbb{N}$, $\exists\ (m, n) \in C(N)$

để cho $\sim P(\varepsilon)$ đúng với (m, n)

$\sim P(\varepsilon)$ là "$| a_m - a_n | \geq \varepsilon$"

$\exists\ \varepsilon \in (0, \infty)$ sao cho $\forall\ N \in \mathbb{N}$, $\exists\ (m, n) \in C(N)$

để cho $| a_m - a_n | \geq \varepsilon$

có một số thực dương ε sao cho với mọi số nguyên dương N có m và $n \geq N$ để cho

$$| a_m - a_n | \geq \varepsilon$$

Bài toán 3. Viết mệnh đề sau đây ra dạng cơ bản :

“ *có một số thực dương M sao cho với mọi* $x \in A$ *ta có* $x \leq M$ ”.

Suy ra phủ định của nó.

$P(M)$ là “$x \leq M$”

$\exists\, M \in (0, \infty)$ sao cho $\forall\, x \in A$ thì $P(M)$ đúng đối với x

$\forall\, M \in (0,\infty)$, $\exists\, x \in A$ để cho $\sim P(M)$ đúng đối với x

$\sim P(M)$ là “$x > M$”

$\forall\, M \in (0, \infty)$, $\exists\, x \in A$ để cho $x > M$

Các mệnh đề có "và" hay "hoặc" và phủ định của chúng

P là "R và S"

$\sim P$ là "$\sim R$ hoặc $\sim S$"

Q là "R hoặc S"

$\sim Q$ là "$\sim R$ và $\sim S$"

P là "$x < 5$ và $y \geq 9$"

$\sim P$ là "$x \geq 5$ hoặc $y < 9$"

Các tương quan suy luận $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$

giả sử P đúng thì Q phải đúng

nếu P đúng thì Q phải đúng

Q đúng khi P đúng

Tất cả các câu này đều có cùng một nghĩa

$$P \Rightarrow Q$$

$$Q \Leftarrow P$$

Nếu "$P \Rightarrow Q$" và "$Q \Rightarrow P$" ta nói P và Q *tương đương* với nhau

$$P \Leftrightarrow Q$$

Phản chứng

để chứng minh "P đúng". ta chỉ cần chứng minh $\sim P$ không thể nào đúng được

- Giả sử $\sim P$ đúng, coi như đây là một giả thiết của bài toán. Giả thiết mới này thường được gọi là *giả thiết phản chứng*.

- Kết hợp giả thiết mới với các giả thiết cho sẵn của bài toán chúng ta cố tìm ra một điều mâu thuẫn với các giả thiết cho sẵn của bài toán hoặc mâu thuẫn với các định nghĩa hoặc các kết quả có từ trước.

Bài tập. Cho A là một tập hợp . Chứng minh $\emptyset \subset A$

Ta dùng phản chứng. Giả sử "$\emptyset \subset A$" sai

Ta phủ định "$\emptyset \subset A$"

"$\emptyset \subset A$" $\Leftrightarrow$ "$\forall x \in \emptyset : x \in A$"

Phủ định "$\emptyset \subset A$" $\Leftrightarrow$ "$\exists x \in \emptyset : x \notin A$"

Vậy giả thiết phản chứng của chúng ta là : có $x \in \emptyset$ sao cho $x \notin A$.

Việc $x \in \emptyset$ mâu thuẫn với định nghĩa của tập trống

Vậy giả thiết phản chứng không thể đúng, nó phải sai, do đó $\emptyset \subset A$

Chứng minh bằng đảo đề

Để chứng minh "$P \Rightarrow Q$" ta có thể chứng minh

"$\sim Q \Rightarrow \sim P$"

Cho a và b là hai số thực dương sao cho $a < b$.

Chứng minh $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

P là "$a < b$" và

Q là " $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ "

"$P \Rightarrow Q$

$\sim Q \Rightarrow \sim P$

$\sqrt{a} \geq \sqrt{b} \quad \Rightarrow \quad a \geq b$

$$\sqrt{a} \geq \sqrt{b} \quad \Rightarrow \quad a \geq b$$

Đặt $c = \sqrt{a}$ và $d = \sqrt{b}$.

$a = c^2$ và $b = d^2$

$$c \geq d \quad \Rightarrow \quad c^2 \geq d^2$$

$c^2 \geq cd$ $\qquad$ $cd \geq d^2$