CHƯƠNG BA

SỐ NGUYÊN VÀ SỐ HỮU TỈ

A. SỐ NGUYÊN - PHÉP CỘNG

Ta xét các bài toán sau: tạo ra lịch cho năm sau (danh sách các ngày và các thứ tương ứng, liên kết ngày dương lịch và ngày âm lịch), tính số cửa sổ để xây một căn nhà, số ngày hoc sinh đến trường hằng năm, số cá có thể nuôi trong một diện tích nào đó, chỉ tiêu tuyển sinh của một đại học. . .

Để mô hình các bài toán bên trên, chúng ta cần một tập hợp con số. Ta không thể có khái niệm : nửa con cá, nửa sinh viên, ta cần khái niệm “nguyên”.

Tập hợp các con số nguyên này gồm có các phần tử nào đó. Tùy theo địa phương nó có nhiều tên, thí dụ có một phần tử được gọi bằng nhiều cách : hai, nhi, dzì, deux, two, ni, ... Chúng còn được ký hiệu theo nhiều cách còn được ký hiệu bằng nhiều cách, thí dụ một phần tử trong tập đó có các ký sau : 12, XII, 1100 (cơ sở nhị phân) . . .

Có thể đồng nhất tập số nguyên với các số đếm hay không? Nếu chúng ta đếm tất cả các sự vật mà chúng ta biết, gọi số đó là M, thì số $M+1$ tuy không là số chúng ta đã dùng để đếm, nhưng nó rõ ràng là một số nguyên! Như vậy khó mà để tìm tập hợp tất cả số nguyên trong thiên nhiên.

Chúng ta chạm đến một hình ảnh diễn tả rất khéo câu sau đây của Lảo tử :

" Đạo khả đạo, phi thường đạo; danh khả danh, phi thường danh"

"Đạo mà diễn giải được thì không phải đạo vĩnh cửu bất biến, tên mà có thể đặt ra để gọi nó [đạo] thì không phải tên vĩnh cửu bất biến ".

(Nguyễn Hiến Lê dịch)

Ở đây chúng ta thấy sức mạnh trí tuệ loài người, đặt ra một cái gì đó (tập hợp các số nguyên) không có sẵn trong tự nhiên, dùng cái đó để giải quyết các vấn đề có thực trong tự nhiên : dùng các tiền đề để định nghĩa tập các số nguyên.

Ông Peano định nghĩa tập số nguyên dựa vào tính thực tiển của các số (cách đếm sự vật, phải có một số đầu tiên, sự nối tiếp các số đếm) và “một tính chất không dể chấp nhận lắm” (tiên đề IV).

Các tiên đề Peano về tập các số nguyên dương :

Có một tập hợp $\mathbb{N}$ cùng với các tính chất sau

I. Với mỗi phần tử x trong $\mathbb{N}$ có một phần tử được ký hiệu là $S(x)$ trong $\mathbb{N}$, được gọi là phần tử kế tiếp của x.

II. Cho x và y là hai phần tử trong $\mathbb{N}$ sao cho

$$S(x) = S(y) \text{ thì } x = y.$$

III. Có một phần tử trong $\mathbb{N}$ được ký hiệu là 1 sao cho 1 không là phần tử kế tiếp của một phần tử nào trong $\mathbb{N}$.

IV. Cho U là một tập hợp con của $\mathbb{N}$ sao cho $1 \in U$ và $S(x) \in U$ với mọi $x \in U$. Lúc đó $U = \mathbb{N}$.

Tập hợp $\mathbb{N}$ *duy nhất theo nghĩa sau : nếu có tập* $\mathbb{N}'$ *thỏa bốn tiên đề Peano với phần tử đầu tiên là* 1’, *thì có một song ánh* f *từ* $\mathbb{N}$ *vào* $\mathbb{N}'$ sao cho $f(1) = f(1')$ *và* $S(f(n)) = f(S(n))$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$.

Định nghĩa. Với bốn tiên đề này ta xác định số 2 như là $S(1)$, số 3 như là $S(2)$, số 4 như là $S(3)$,... ta sẽ có mọi số thường dùng để đếm

Định nghĩa. Ta có phép cộng trên $\mathbb{N}$ như sau :

$n + 1 = S(n)$, $n + 2 = S(n+1)$, $n + 3 = S(n+2)$,.... $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Định nghĩa. Ta xác định phép nhân trên $\mathbb{N}$ như sau :

$1.n = n$, $2.n = n + n$, $3.n = 2.n + n$,..... $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Ông Peano đã đóng góp một ý toán rất quan trọng : $\mathbb{N}$ không chỉ là một tập hợp chứa các số nguyên dương, mà trong $\mathbb{N}$ còn có một cấu trúc logic "*phần tử kế tiếp*". Chính cấu trúc logic này xác định các phép toán cộng và nhân trên $\mathbb{N}$ và quan hệ thứ tự sau đây trên $\mathbb{N}$.

Định nghĩa. Ta có một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}$ như sau : cho m và n trong $\mathbb{N}$, ta nói

- $n > m$ (hay $m < n$) nếu và chỉ nếu $n = m + r$ với một r nào đó trong $\mathbb{N}$,
- $n \geq m$ (hay $m \leq n$) nếu và chỉ nếu $n = m$ hoặc $n > m$.

Định lý. *Định nghĩa các phép* + *và* . *và quan hệ* $\geq$ *trong* $\mathbb{N}$ *như trên. Ta có với mọi* m, n, p *và* q *trong* $\mathbb{N}$

(i) $m+n = n+m$, $n.m = m.n$ *và* $m.(n+p) = m.n + m.p$,

(ii) $\geq$ *là một quan hệ thứ tự toàn phần trên* $\mathbb{N}$.

(iii) *nếu* $m \geq n$ và $p \geq q$, *thì*

$$m+p \geq n+q \quad \text{và} \quad mp \geq np.$$

(iv) *Cho* A *là một tập con khác trống trong* $\mathbb{N}$, *lúc đó có* z *trong* A *sao cho* $n \geq z$ *với mọi* n *trong* A (*ta nói* A *có cực tiểu*).

Các tiên đề của Peano (tương đối khá tự nhiên) giúp chúng ta sẽ làm toán cộng và toán nhân có lý luận chặc chẽ hơn! Ngoài ra các tiên đề này còn cho ta một cách chứng minh đặc biệt : *qui nạp toán học*.

Định lý. *Cho* $A \subset \mathbb{N}$ *và* $p \in A$. *Giả sử* $S(n) \in A$ *nếu* $n \in A$. *Lúc đó* $\{m \in \mathbb{N} : m \geq p\} \subset A$.

B. PHÉP QUI NẠP TOÁN HỌC

Khi ta quan sát không phải một hiện tượng, một tính chất mà cả một dãy hiện tượng hoặc một dãy tính chất $\{P_n\}$ với n là các số nguyên dương, ta có thể dùng phép qui nạp toán học để chứng minh P_n đúng với mọi $n \geq N$ chỉ cần hai bước như sau :

- Chứng minh P_n đúng với $n = N$,
- Cho k là một số nguyên dương $k \geq N$. Giả sử P_k đúng, chứng minh P_{k+1} cũng đúng.

Nếu làm được hai điều trên, ta kết luận P_n đúng với mọi $n \geq N$.

Bài toán 5. *Cho* $n \in \mathbb{N}$. *Đặt* $X_n = 1 + 2^3 + \ldots + n^3$.

Chứng minh $X_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Đặt $P(n)$ là " $X_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ". Ta thấy $P(1)$ đúng

Giả sử $P(k)$ đúng với một $k \geq 1$, ta có $X_k = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$

$$X_{k+1} = X_k + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= \frac{1}{4}(k+1)^2[k^2 + 4k + 4] = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Vậy theo qui nạp toán học $P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$.

Bài toán 6. *Cho m và n là hai số nguyên dương. Giả sử có một đơn ánh f từ $\{1, . . . ,m\}$ vào $\{1, . . . ,n\}$. Chứng minh $m \leq n$.*

Nếu $m = 1$. Ta có $m \leq n$ (thật ra không cần giả thiết về f)

Giả sử kết quả đúng khi $m = k$.

Nếu có một đơn ánh f từ $\{1, ... , k\}$ vào $\{1, ... , n\}$. Thì $k \leq n$

Giả sử có một đơn ánh f từ $\{1,. . . , k+1\}$ vào $\{1,. . . , n\}$. Chứng minh $k+1 \leq n$.

Giả sử có một đơn ánh g từ $\{1,. . . , k+1\}$ vào $\{1,. . . , p\}$. Chứng minh $k+1 \leq p$.

Nếu có đơn ánh f từ $\{1,\dots,k\}$ *vào* $\{1,\dots,n\}$. *Thì* $k \le n$

Giả sử có một đơn ánh g từ $\{1,\dots,k+1\}$ *vào* $\{1,\dots,p\}$. *Chứng minh* $k+1 \le p$.

Giả sử có một đơn ánh g từ $\{1,\dots,k+1\}$ *vào* $\{1,\dots,p\}$. *Chứng minh* $k \le p - 1$.

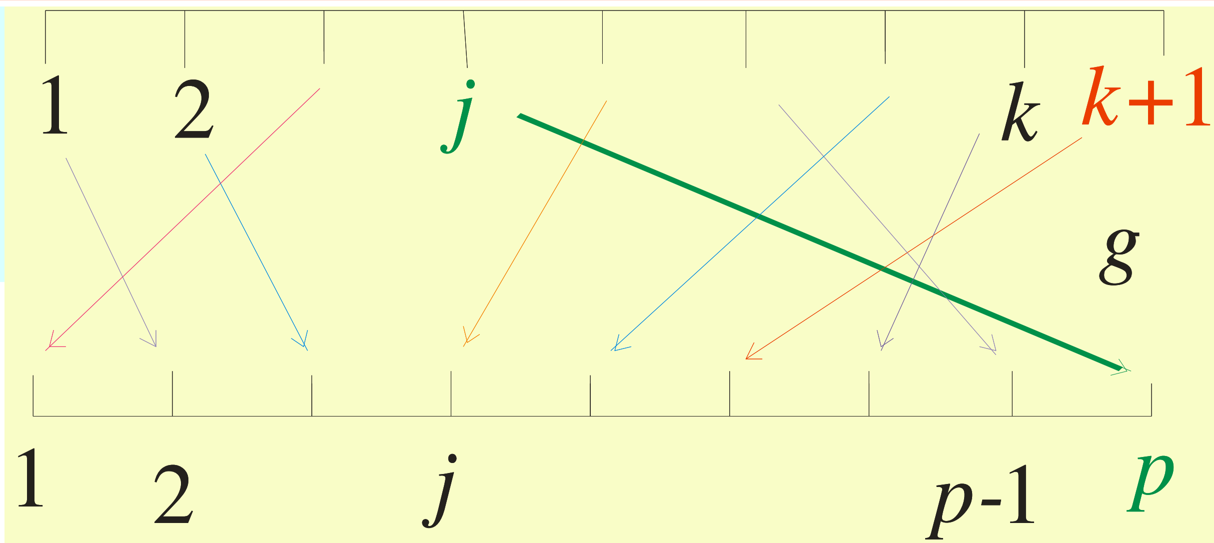
• $g(\{1,\dots,k\}) \subset \{1,\dots,p-1\}$

dùng giả thiết qui nạp

•• $g(\{1,\dots,k\})$ không chứa trong $\{1,\dots,p-1\}$.

•• $\exists\, j \in \{1,\dots,k\}$

sao cho $g(j) = p$

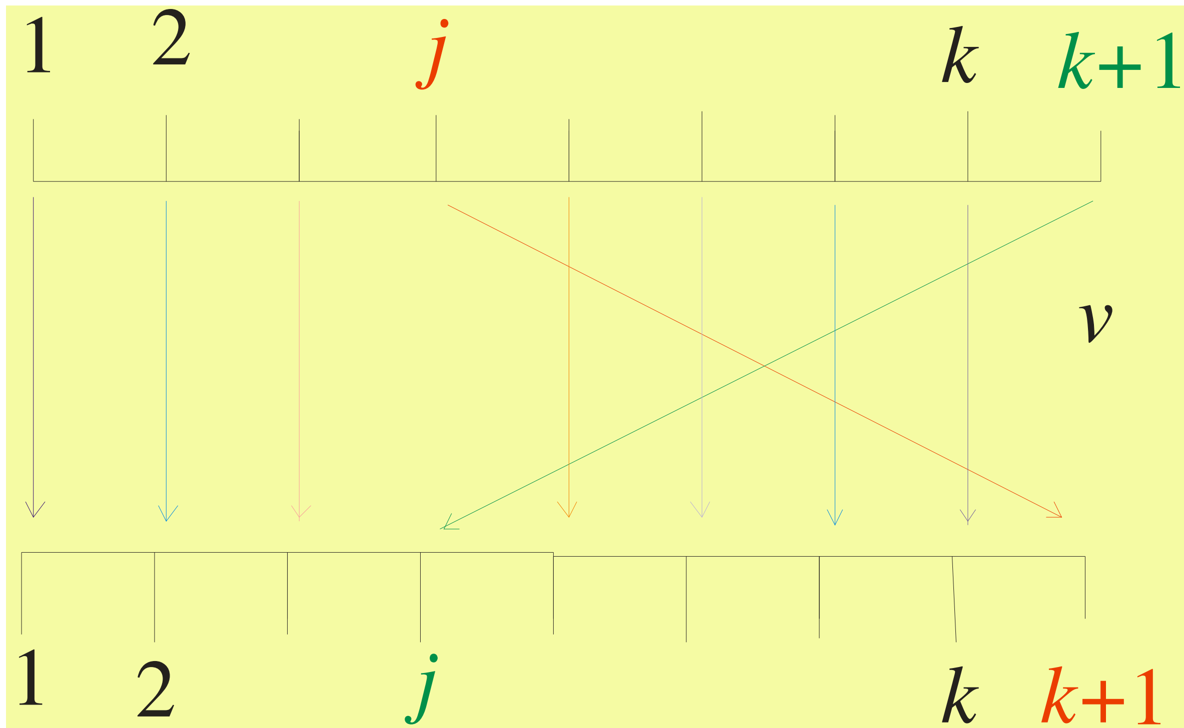


Nếu có một đơn ánh f từ $\{1, \ldots, k\}$ *vào* $\{1, \ldots, n\}$.
Thì $k \le n$

Giả sử có một đơn ánh g từ $\{1, \ldots, k+1\}$ *vào* $\{1, \ldots, p\}$. *Chứng minh* $k \le p - 1$.

• • $\exists\, j \in \{1, \ldots, k\}$ sao cho $g(j) = p$

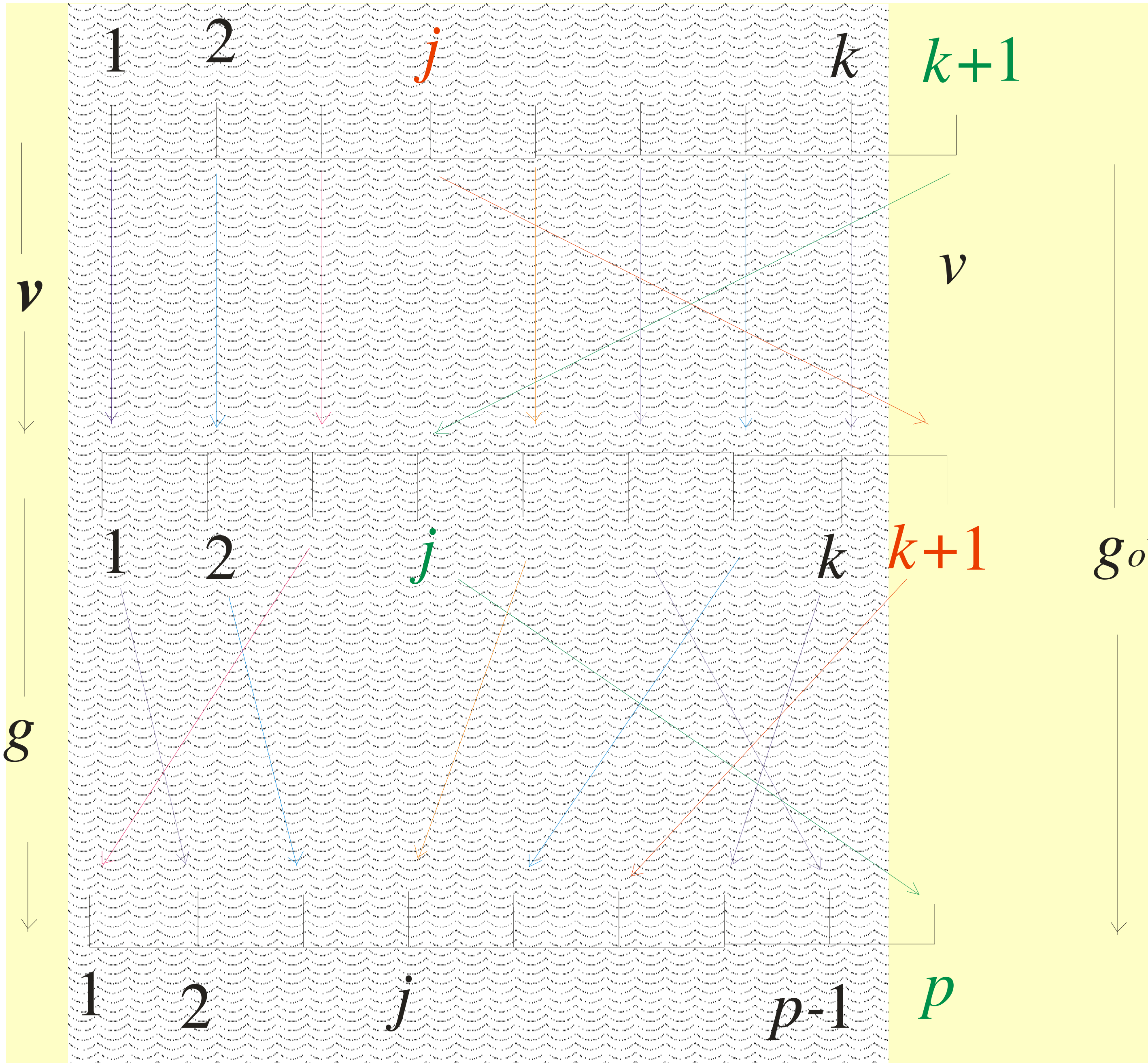
Để đưa về trường hợp • , ta đặt ánh xạ v như trong hình vẽ



Ta có :

$g \circ v(k+1) = p$

$g \circ v$ là một đơn ánh



Do đó

$g \circ v(i) \leq p-1 \quad \forall\, i \leq k$

Thay thế g bằng $g \circ v$, ta đưa về trường hợp đã xét .

Bài toán 7. *Cho m và n là hai số nguyên dương. Giả sử có một song ánh f từ* $\{1, . . . , m\}$ *vào* $\{1, . . . , n\}$. *Chứng minh* $m = n$.

f *là một đơn ánh từ* $\{1, . . . , m\}$ *vào* $\{1, . . . , n\}$. *Do đó* $m \leq n$

f^{-1} *là một đơn ánh từ* $\{1, . . . , n\}$ *vào* $\{1, . . . , m\}$. *Do đó* $n \leq m$

Dùng kết quả này, ta có thể định nghĩa "hữu hạn"

Dùng kết quả này, ta có thể định nghĩa “hữu hạn”

Định nghĩa. Cho A là một tập hợp khác trống, ta nói A có *m phần tử* nếu và chỉ nếu có một song ánh f từ tập hợp $\{1, 2, 3, \cdots, m\}$ vào A. Lúc đó ta nói tập hợp A *có hữu hạn phần tử*

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, shift left, "\boldsymbol{g^{-1}}"] & \\
\{1,\ldots,m\} \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\boldsymbol{g^{-1}\circ f}"'] & & \{1,\ldots,n\} \arrow[ul, shift left, "g"]
\end{tikzcd}$$

Định nghĩa. Cho A là một tập hợp khác trống, ta nói

• A có *n phần tử* nếu và chỉ nếu có một song ánh f từ tập hợp $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ vào A. Lúc đó ta nói tập hợp A *có* hữu hạn phần tử.

• A là một tập hợp vô hạn đếm được (hoặc vắn tắt là đếm được) nếu và chỉ nếu có một song ánh f từ $\mathbb{N}$ vào A.

• A là một tập hợp quá lắm đếm được nếu và chỉ nếu A *có* hữu hạn phần tử hoặc vô hạn đếm được .

• A là một tập hợp vô hạn không đếm được nếu và chỉ nếu A không hữu hạn và không vô hạn đếm được .

Bài toán 8. Đặt $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ là họ tất cả các tập hợp con của $\mathbb{N}$. Chứng minh $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ là một tập vô hạn không đếm được.

A là một tập hợp vô hạn không đếm được nếu và chỉ nếu A không hữu hạn và không vô hạn đếm được .

Dùng phản chứng

A *không* là tập hợp vô hạn không đếm được nếu và chỉ nếu A hữu hạn hoặc A vô hạn đếm được .

$\mathscr{P}(\mathbb{N}) \supset \{ \{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}, \ldots\}$: không hữu hạn

Giả thiết phản chứng : $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ vô hạn đếm được .

Giả sử $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ vô hạn đếm được

A là một tập hợp vô hạn đếm được nếu và chỉ nếu có một song ánh f từ $\mathbb{N}$ vào A.

Có một song ánh f từ $\mathbb{N}$ vào $\mathscr{P}(\mathbb{N})$

Đặt $f(n) = A_n$

$\mathscr{P}(\mathbb{N}) = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$

Để dễ xử lý các tập con của $\mathbb{N}$, ta tương ứng mỗi tập con B của $\mathbb{N}$ bằng một hàm số sau

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in B, \\ 0 & \text{nếu } x \in \mathbb{N} \setminus B. \end{cases}$$

$$B' = B \Leftrightarrow \chi_{B'} = \chi_B$$

χ_B được gọi là hàm đặc trưng của B

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \textit{nếu } x \in B, \\ 0 & \textit{nếu } x \in \mathbb{N} \setminus B. \end{cases}$$

$$B' = B \Leftrightarrow \chi_{B'} = \chi_B$$

Vậy có một song ánh từ $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ vào $F = \{\chi_B \ : \ B \subset \mathbb{N}\}$

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{P}(\mathbb{N}) \ni A_n \arrow[dr, "\chi_{A_n}"] & \\ \mathbb{N} \arrow[ur] \arrow[rr, "n"] & & F \end{tikzcd}$$

$$E = \{\chi_{A_n} : n \in \mathbb{N}\}$$

$$E = F$$

$$\text{Đặt } g(n) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \chi_{A_n}(n) = 1, \\ 1 & \text{nếu } \chi_{A_n}(n) = 0. \end{cases}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} : g(n) = 1\}$$

$$g = \chi_B \in F$$

$$g \neq \chi_{A_n} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$$g \notin E = \{\chi_{A_n} : n \in \mathbb{N}\}$$

$$E \neq F$$

C. CÁC TẬP HỢP $\mathbb{Z}$ VÀ $\mathbb{Q}$

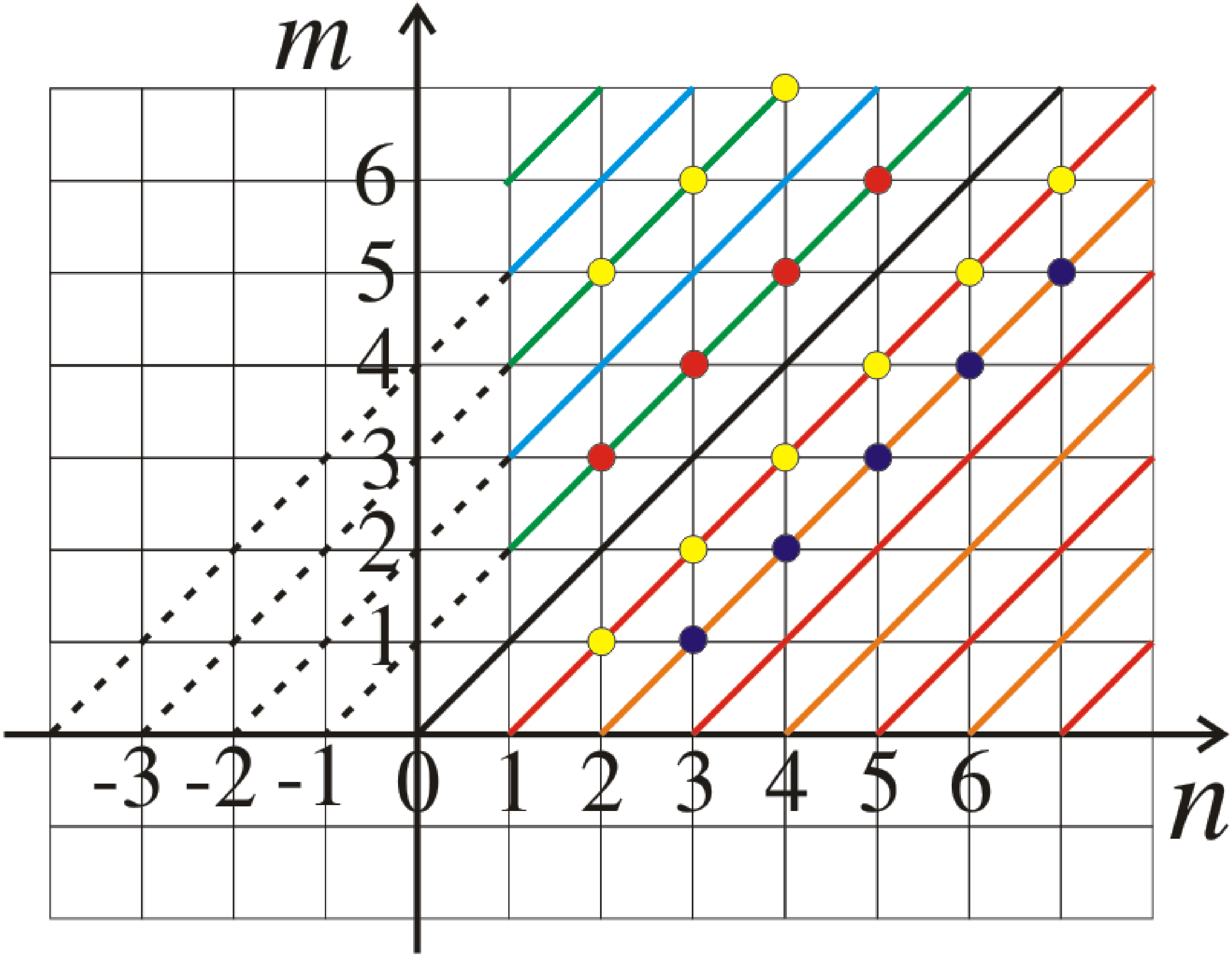
Cho m và n trong $\mathbb{N}$, xét phương trình $n = x + m$.

• $n > m$: theo định nghĩa ta có một số nguyên r sao cho $n = m + r$. Vậy ta chọn $x = r$.

• $n < m$: theo định nghĩa ta có một số nguyên s sao cho $m = n + s$. Vậy "m bớt đi s" = n . Trong toán học ta ký hiệu "bớt đi s" là $-s$.

Phương trình này làm nảy sinh tập hợp các số nguyên âm $\{-q : q \in \mathbb{N}\}$

Đặt $\mathbb{Z} = \{-q : q \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ và gọi $\mathbb{Z}$ là tập các số nguyên.



$3 = x + 1$

$4 = x + 2$

$5 = x + 3$

$6 = x + 4$

$7 = x + 5$

$2 = z + 5$

$3 = z + 6$

$4 = z + 7$

Nếu $m \in \{-q : q \in \mathbb{N}\}$ ta nói m là *một số nguyên âm* và viết $m < 0$, nếu $m \in \mathbb{N}$ ta nói m là *một số nguyên dương* và viết $m > 0$.

Với số nguyên m ta đặt sign(m) như sau và gọi đó là dấu của m

$$\mathrm{sign}(m) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } m > 0 \ , \\ 0 & \text{nếu } m = 0 \ , \\ -1 & \text{nếu } m < 0 \ . \end{cases}$$

Đặt $0.m = m.0 = 0$ với mọi $m \in \mathbb{Z}$

Mọi số nguyên m có thể viết thành sign(m) m' với một m' trong $\mathbb{N}$.

Trên $\mathbb{Z}$ ta có các định nghĩa sau đây : với mọi m, n, p và q trong $\mathbb{Z}$

- $-m = -\text{sign}(m)|m|$, $m + (-m) = 0$, $0 + m = m$
- $m+n = \text{sign}(m)[|m| + |n|]$ nếu $\text{sign}(m) = \text{sign}(n)$
- $m+n = \text{sign}(m)[|m|-|n|]$ nếu $\text{sign}(m) \neq \text{sign}(n)$, $|m| \geq |n|$
- $m+n = \text{sign}(n)[|n|-|m|]$ nếu $\text{sign}(m) \neq \text{sign}(n)$, $|n| \geq |m|$
- $0.m = 0$
- $n.m = |m|.|n|$ nếu $\text{sign}(m) = \text{sign}(n)$
- $n.m = -|m|.|n|$ nếu $\text{sign}(m) \neq \text{sign}(n)$
- $m > n$ nếu và chỉ nếu $m - n \in \mathbb{N}$
- $m \geq n$ nếu và chỉ nếu $m = n$ hoặc $m > n$.

Định lý. *Định nghĩa các phép cộng* + và nhân. và quan hệ $\geq$ trong $\mathbb{Z}$ *như trên*. Ta có với mọi m, n, p, *và* q *trong* $\mathbb{Z}$.

(i) $m+n = n+m$, $n.m = m.n$ *và* $m.(n+p) = m.n + m.p$,

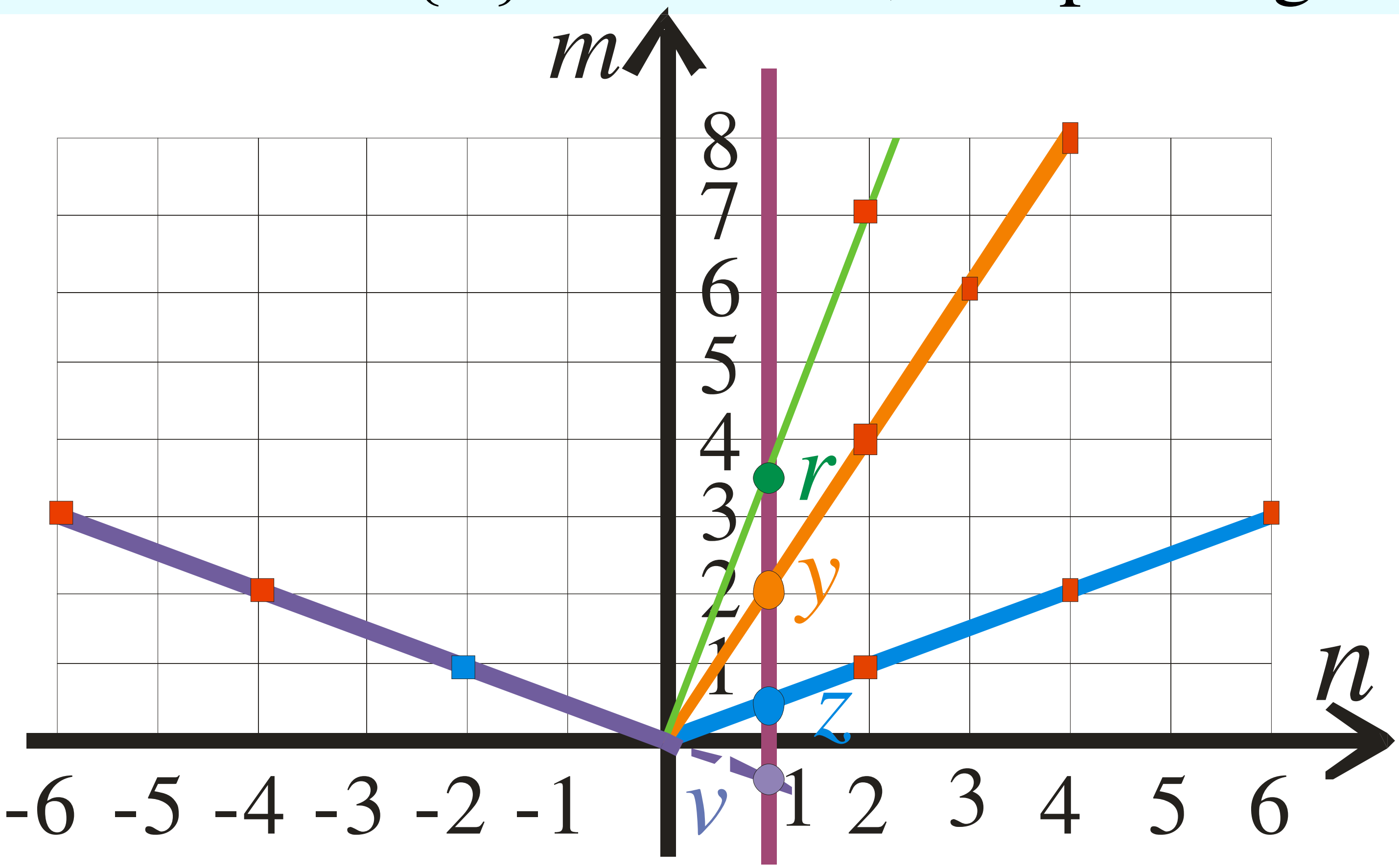
(ii) $\geq$ *là một quan hệ thứ tự toàn phần trên* $\mathbb{Z}$.

(iii) *nếu* $m \geq n$, $p \geq q$ và $r \geq 0$, thì

$$m + p \geq n + q \text{ và } mr \geq nr.$$

(iv) $|m| \geq m$

Cho $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ và $m \in \mathbb{Z}$, xét phương trình $nx = m$.



$-6.p = 3$

$-4.p = 2$

$1.q = 2$

$2q = 4$

$4.r = 2$

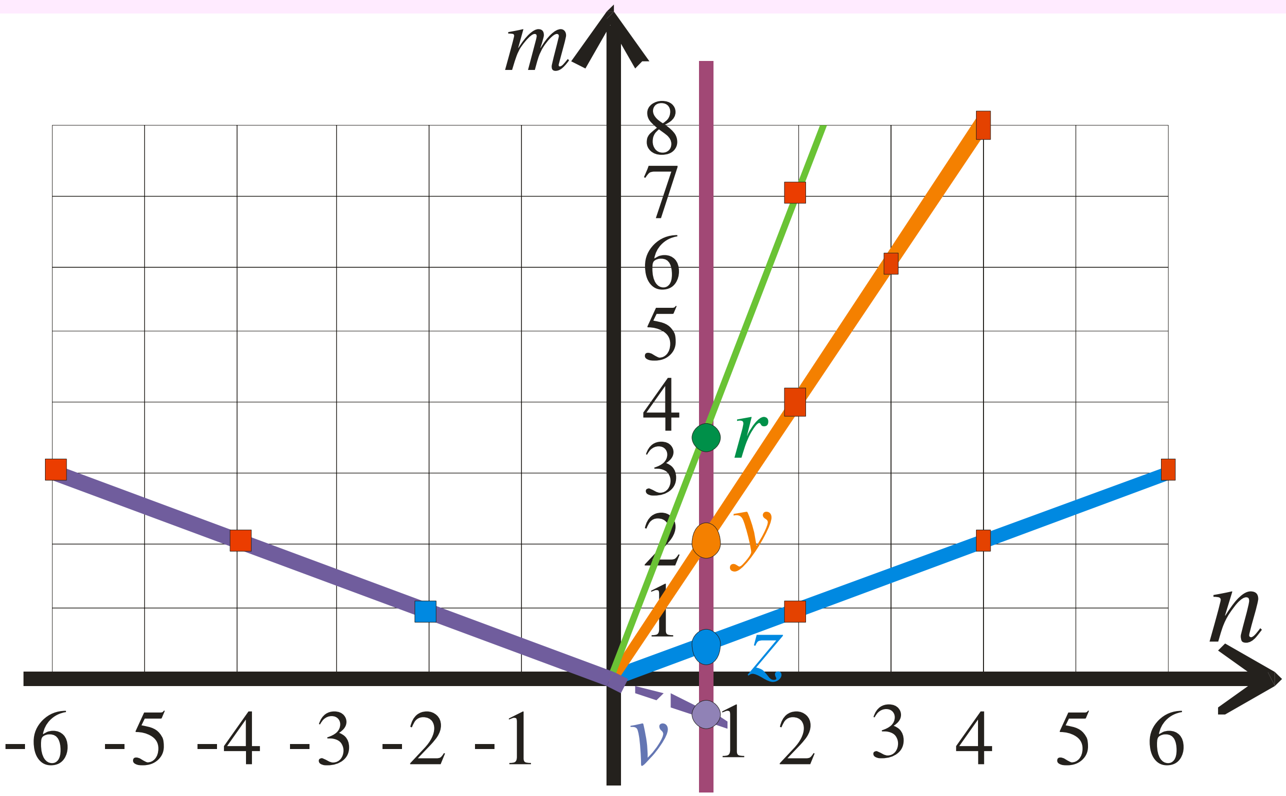
$6.r = 3$

Phương trình này có thể không có nghiệm trong $\mathbb{Z}$ (thí dụ $4x = 2$). Nhưng ta có thể coi (n,m) như là một nghiệm của nó và xét tập hợp $\mathbb{Q}$ xác định như sau

Xét $X = (\mathbb{Z} \setminus \{0\})\times\mathbb{Z} = \{(n,m) : n\in\mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ và } m\in\mathbb{Z}\}$

Trên X ta định nghĩa quan hệ R như sau $(n,m)\mathscr{R}(n',m') \Leftrightarrow n.m' = n'.m$

Ta chứng minh được $\mathscr{R}$ là quan hệtương đương. Ta đặt Q là tập thương X/$\mathscr{R}$.



Ta ký hiệu lớp tương đương của (n,m) là $\dfrac{m}{n}$ và ta gọi đó là một số hữu tỉ.

$-6.x = 3$

$-4.x = 2$

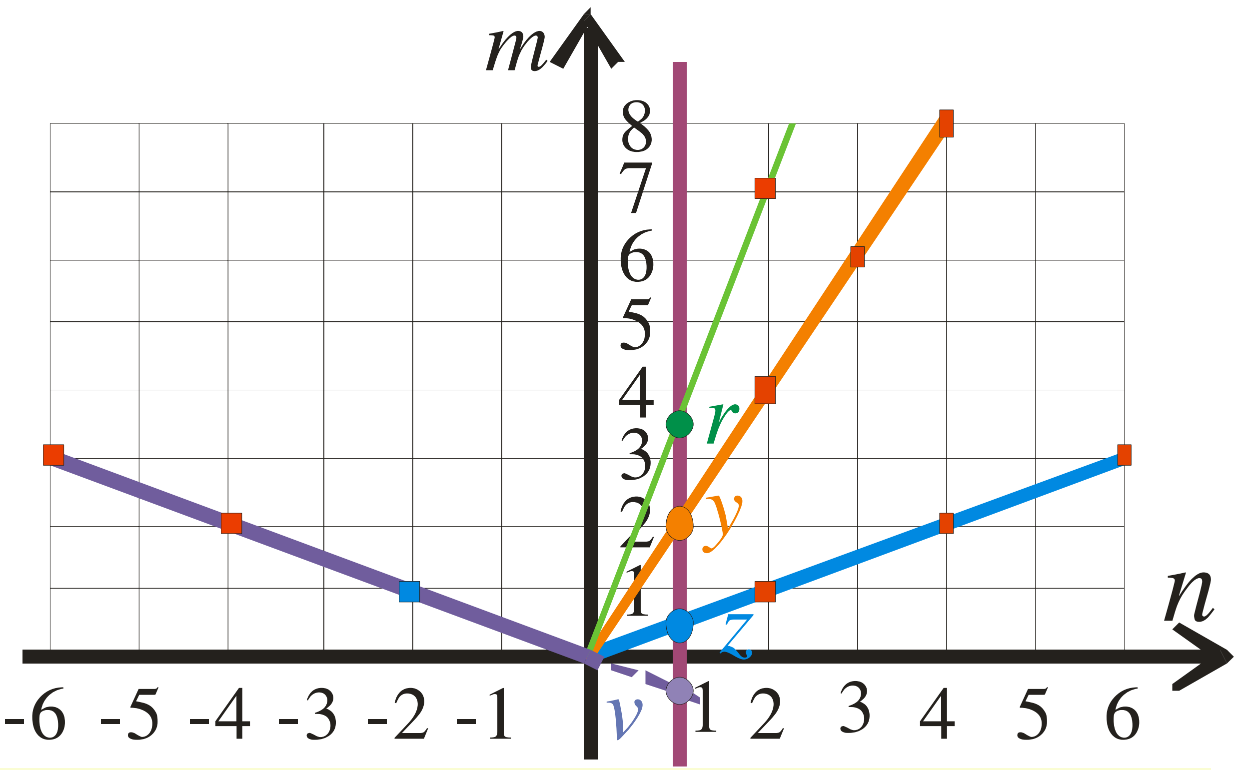
$2.y = 2$

$4.y = 4$

CH

$4.z = 2$

$6.z = 3$



Vì 2.6 =3.4 nên $(4,2)\mathscr{R}(6,3)$. Do đó $\frac{2}{4}$ và $\frac{3}{6}$ chỉ là một số hữu tỉ z.

$$r = \frac{3}{2}\ ,\ \ y = 2\ ,\ \ z = \frac{1}{2}\ ,\ \ v = -\frac{1}{2}$$

Như vậy một số hữu tỉ có thể được viết ra nhiều dạng khác nhau, mỗi dạng của nó là một *phân số* $\frac{m}{n}$, trong đó m được gọi là tử số và n được gọi là mẫu số.

- $\dfrac{m}{n} = \dfrac{km}{kn}$ với mọi số hữu tỉ và với mọi $k \in \mathbb{N}$.
- đồng nhất m với $\dfrac{m}{1}$ với mọi $m \in \mathbb{Z}$, ta có $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- nếu $p = \dfrac{m}{n} \neq 0$ thì $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ và ta có thể

xét số hữu tỉ $\dfrac{n}{m}$, ta ký hiệu $\dfrac{n}{m}$ là p^{-1}.

- vì $(n,m)\ \mathscr{R}\ (|n|, \mathrm{sign}(n)\, m)$, ta có thể viết các số

hữu tỉ ở dạng $\dfrac{r}{s}$ với $s \in \mathbb{N}$ và $r \in \mathbb{Z}$.

Định nghĩa . Cho các số hữu tỉ $\dfrac{m}{n}$ và $\dfrac{r}{s}$ với n và $s \in \mathbb{N}$ và m và $r \in \mathbb{Z}$. Ta định nghĩa

$$\frac{m}{n}+\frac{r}{s}=\frac{ms+nr}{ns} \quad , \quad \frac{m}{n}.\frac{r}{s}=\frac{mr}{ns}$$

$$\left|\frac{m}{n}\right|=\frac{|m|}{|n|}$$

$\dfrac{m}{n}>\dfrac{r}{s}$ nếu và chỉ nếu $ms > nr$

$\dfrac{m}{n}\geq\dfrac{r}{s}$ nếu và chỉ nếu $ms \geq nr$

Định lý . *Định nghĩa các phép cộng + và nhân.* và *quan hệ* $\geq$ *trong* $\mathbb{Q}$ *như trên. Ta có với mọi* m, n, p *và* q *trong* $\mathbb{Q}$ *và* $p \neq 0$

(i) $m + n = n + m$ *và* $m.(n + p) = m.n + m.p$,

(ii) $n.m = m.n$ *và* $p.p^{-1} = 1$,

(iii) *nếu* $m \geq n$ *và* $n \geq m$, *thì* $m = n$,

(iv) *nếu* $m \geq n$, $p \geq q$ *và* $r \geq 0$, thì $m + p \geq n + q$ và $mr \geq nr$. Nếu $m > n$ *và* $r > 0$, thì $mr > nr$.

(v) $|m| \geq m$.