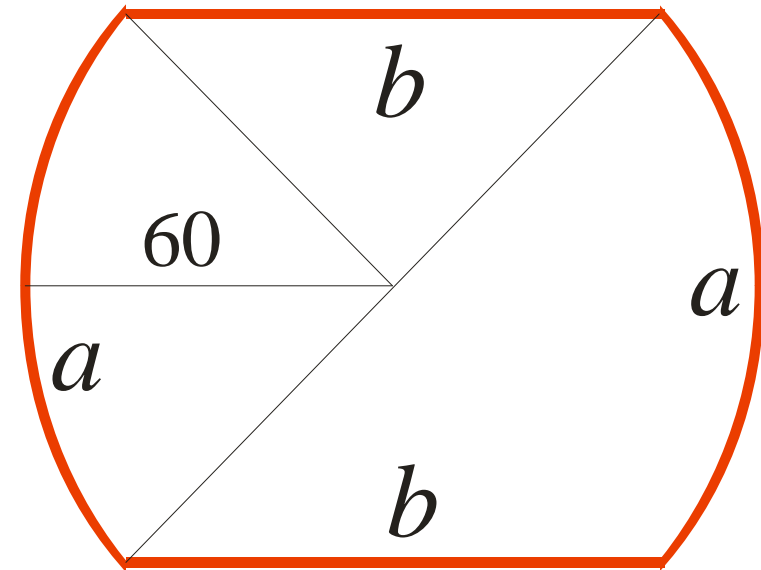


CHƯƠNG NĂM

DÃY VÀ CHUỖI SỐ THỰC

Để xây dựng một rào ngăn khán giả tràn vào sân thi đấu bóng đá, ta cần tính chu vi p của một hình như bên cạnh. Hình này gồm hai cung tròn và hai đoạn thẳng, mỗi cung là một phần tư của một đường tròn có bán kính 60 mét.



Dùng các công thức đơn giản ta tính được

$$p = (60\pi + 120\sqrt{2}) \text{ mét}$$

Nếu bạn học toán để đạt huy chương Field, thì công thức trên quá tốt. Nhưng khi đưa vào các đề án thi công thực tế, chúng ta phải dùng một trong các giá trị của p như sau

$$p = 60 \times 3,14 + 120 \times 1,41 ;$$

$$p = 60 \times 3,141 + 120 \times 1,414 ;$$

$$p = 60 \times 3,1416 + 120 \times 1,4142 .$$

Như vậy trong thực tế, một số số thực thường được thay thế bằng các giá trị xấp xỉ của chúng.

Thí dụ , người thường đồng nhất π với một trong các số $\{3,14; 3,141; 3,1416\}$, và $\sqrt{2}$ với một trong các số $\{1,41; 1,414; 1,4142\}$

Nay ta xem cách mô hình ý tưởng trên của các nhà toán học .

Định nghĩa . Cho f là một ánh xạ từ \mathbb{N} vào \mathbb{R} , đặt $a_n = f(n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta nói $\{a_n\}$ là một dãy số thực.

Thí dụ 1. $\{\sin(n^3 + 2n)\}$ là một dãy số thực

Thí dụ 2. Đặt $a_1 = 3,14$, $a_2 = 3,141$, $a_3 = 3,1415$,
 $a_4 = 3,14159$, $a_5 = 3,141592$, $a_6 = 3,1415926$,
 $a_7 = 3,14159265$, $a_8 = 3,141592653$, $a_9 = 3,1415926535$,
... Đây là dãy số giúp chúng ta chọn các giá trị gần đúng của số π theo các sai số cho phép trong các tính toán cụ thể .

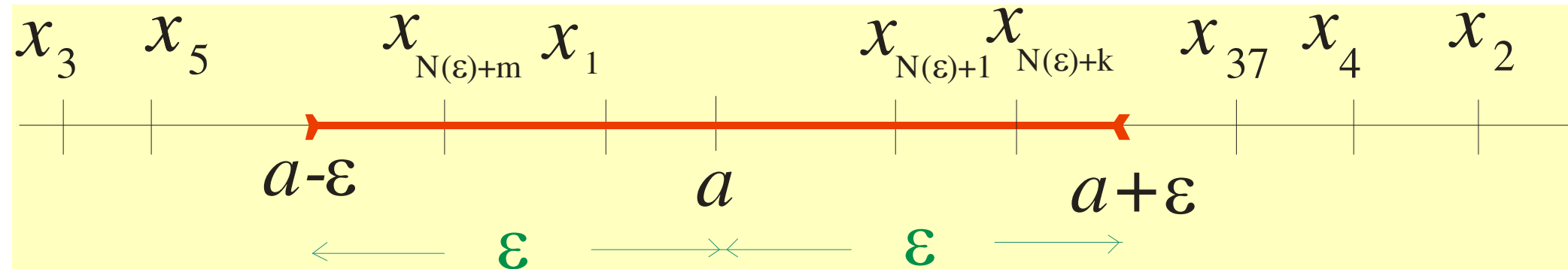
Ta xem mô hình toán học của ý tưởng đồng nhất một số thực a với một dãy các giá trị xấp xỉ của nó như sau

Định nghĩa . Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực và một số thực a .

Ta nói dãy $\{x_n\}$ hội tụ về a nếu và chỉ nếu

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$



Bài toán 18. Chứng minh $\{n^{-1}\}$ hội tụ về 0 .

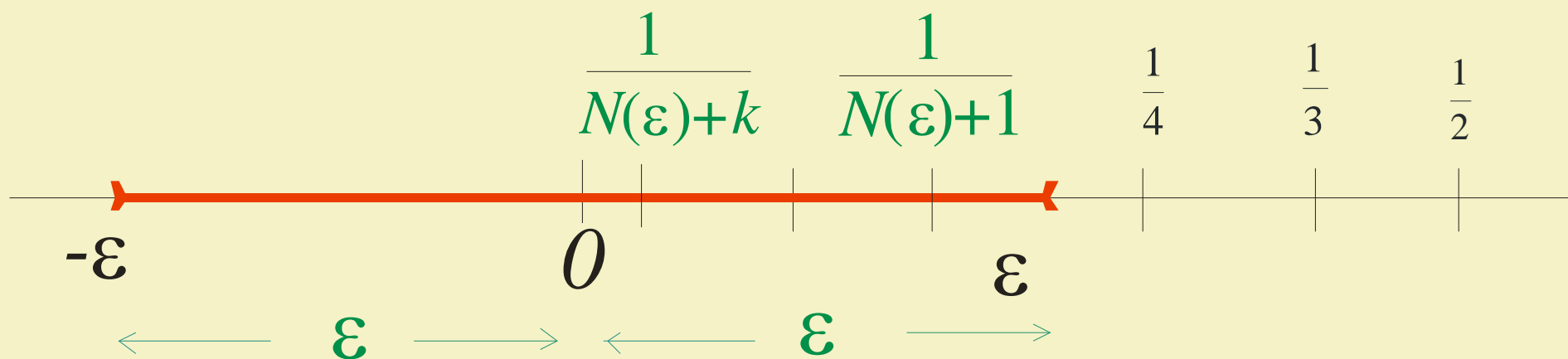
Chúng ta nên mô hình toán học như sau : đặt $x_n = n^{-1}$ với mọi số nguyên dương, và chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ về 0.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$



Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

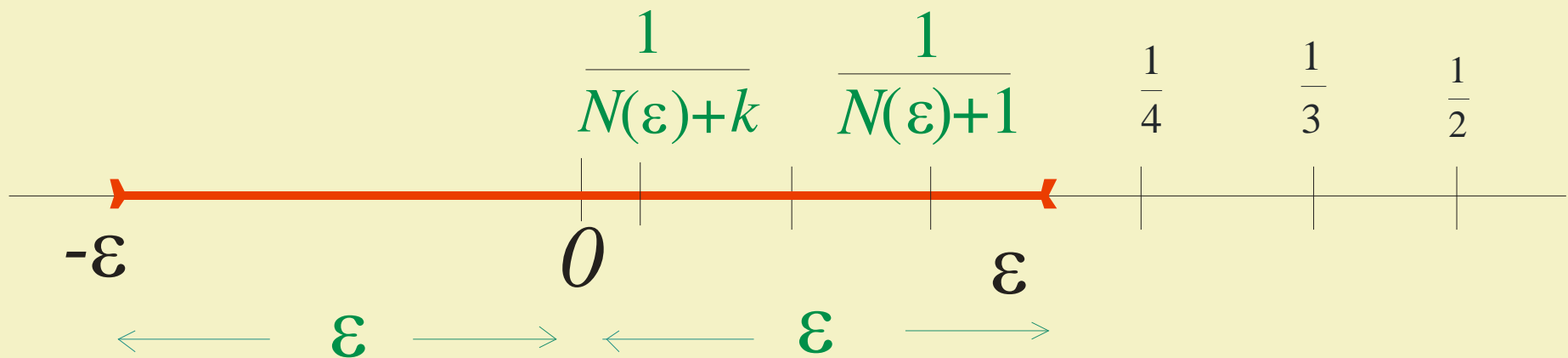
$$|n^{-1} - 0| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$n^{-1} < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\varepsilon^{-1} < n \quad \forall n > N(\varepsilon)$$



Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\varepsilon^{-1} < n \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

(R18) (*Tính chất Archimède*) Nếu $x > 0$ và $0 < y$, lúc đó có một số nguyên dương N sao cho

$$y < Nx \quad . \quad (\text{hay } N^{-1}y < x \quad)$$

$$y = \varepsilon^{-1} \quad \text{và} \quad x = 1$$

Có một số nguyên dương $N(\varepsilon) : \varepsilon^{-1} < N(\varepsilon) . 1$

$$\varepsilon^{-1} < N(\varepsilon) . 1 < n \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\varepsilon^{-1} < n \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Bài toán 19. Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực sao cho có một số thực dương C để cho

$$|x_n| \leq n^{-1}C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ về 0 .

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - 0| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$n^{-1}C < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\varepsilon^{-1}C < n \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Bài toán 20. Chứng minh $\{2^{-n}\}$ hội tụ về 0 .

Chúng ta mô hình toán học như sau : đặt

$$x_n = 2^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ về 0 .

Chứng minh có một số thực C sao cho

$$|x_n| \leq n^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

$$P_n : n \leq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2^{-n} \leq n^{-1} ; 2^{-k-n} \leq 2^{-k} \cdot n^{-1})$$

$$P_1 : 1 \leq 2^1 = 2 \quad \text{đúng}$$

$$P_n \text{ đúng} : n \leq 2^n$$

$$P_{n+1} : n+1 \leq 2^{n+1}$$

$$n+1 = (n) + 1 \leq 2^n + 1 \leq 2^n + 2^n \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

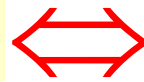
$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

?

$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$



$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

?

$\forall \varepsilon' > 0, \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| \leq \varepsilon' \quad \forall n > M(\varepsilon')$$



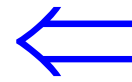
$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$



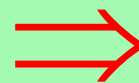
$\forall \varepsilon' > 0 \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| \leq \varepsilon' \quad \forall n > M(\varepsilon')$$



$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$



$\forall \varepsilon' > 0 \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

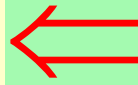
$$|x_n - a| \leq \varepsilon' \quad \forall n > M(\varepsilon')$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

$\forall \varepsilon' > 0 \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| \leq \varepsilon' \quad \forall n > M(\varepsilon')$$



Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có một $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| \leq \varepsilon' \quad \forall n > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có một $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| \leq \varepsilon' \quad \forall n > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

$$\boxed{} < \eta \iff \boxed{} \leq \frac{1}{2}\eta$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| \leq \frac{1}{2}\varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho ε , đặt $\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon$, ta có $M(\varepsilon')$, đặt

$$N(\varepsilon) = M(\varepsilon') = M\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

?

$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$



$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

?

$\forall \varepsilon' > 0 \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon' \quad \forall n \geq M(\varepsilon')$$



$$n > N(\varepsilon) \Leftrightarrow n \geq N(\varepsilon) + 1$$

Bài tập tự làm

$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

?

$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$



Định nghĩa . Cho g là một ánh xạ từ tập hợp các số nguyên dương \mathbb{N} vào \mathbb{N} . Đặt

$$n_k = g(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ta dùng $\{n_k\}$ thay cho $\{x_n\}$ vì ta thường ký hiệu các số nguyên dương là n

$$g(k) = 12 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$n_k = 12 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$g(k) = k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

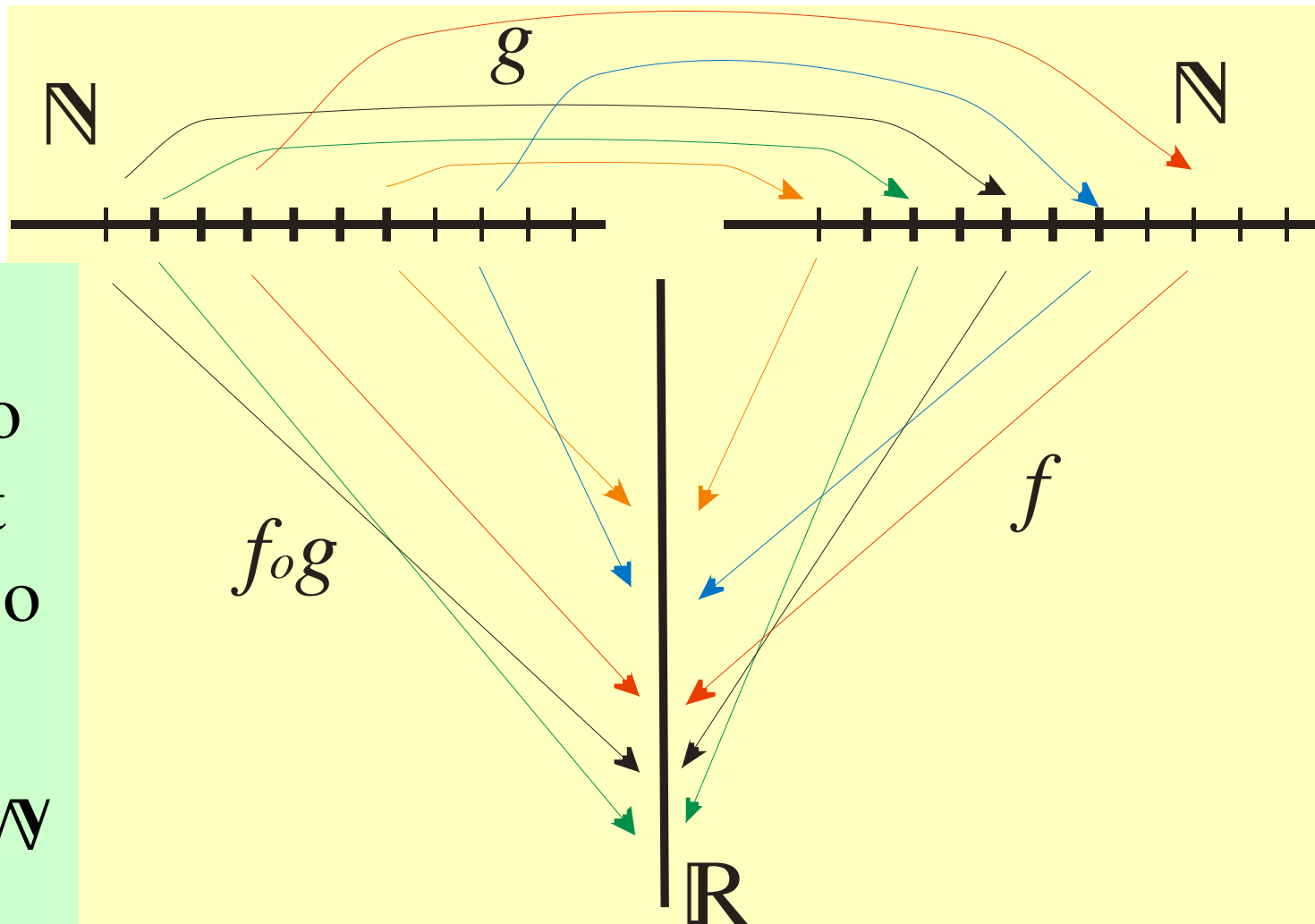
$$n_k = k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$g(k) = 3k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$n_k = 3k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$g(k) = k^2 - 8k + 100 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$n_k = k^2 - 8k + 100 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$



Cho g là một ánh xạ từ \mathbb{N} vào \mathbb{N} và f là một ánh xạ từ \mathbb{N} vào \mathbb{R} . Đặt

$$x_n = f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_k = fog(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ta thấy fog cũng là một ánh xạ từ \mathbb{N} vào \mathbb{R} .

Vậy $\{x_n\}$ và $\{b_k\}$ là các dãy số thực.

Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực và một số thực a .
Ta nói dãy $\{x_n\}$ hội tụ về a nếu và chỉ nếu

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho g là một ánh xạ từ \mathbb{N} vào \mathbb{N} và f là một ánh xạ từ \mathbb{N} vào \mathbb{R} . Đặt

$$x_n = f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$b_k = f \circ g(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

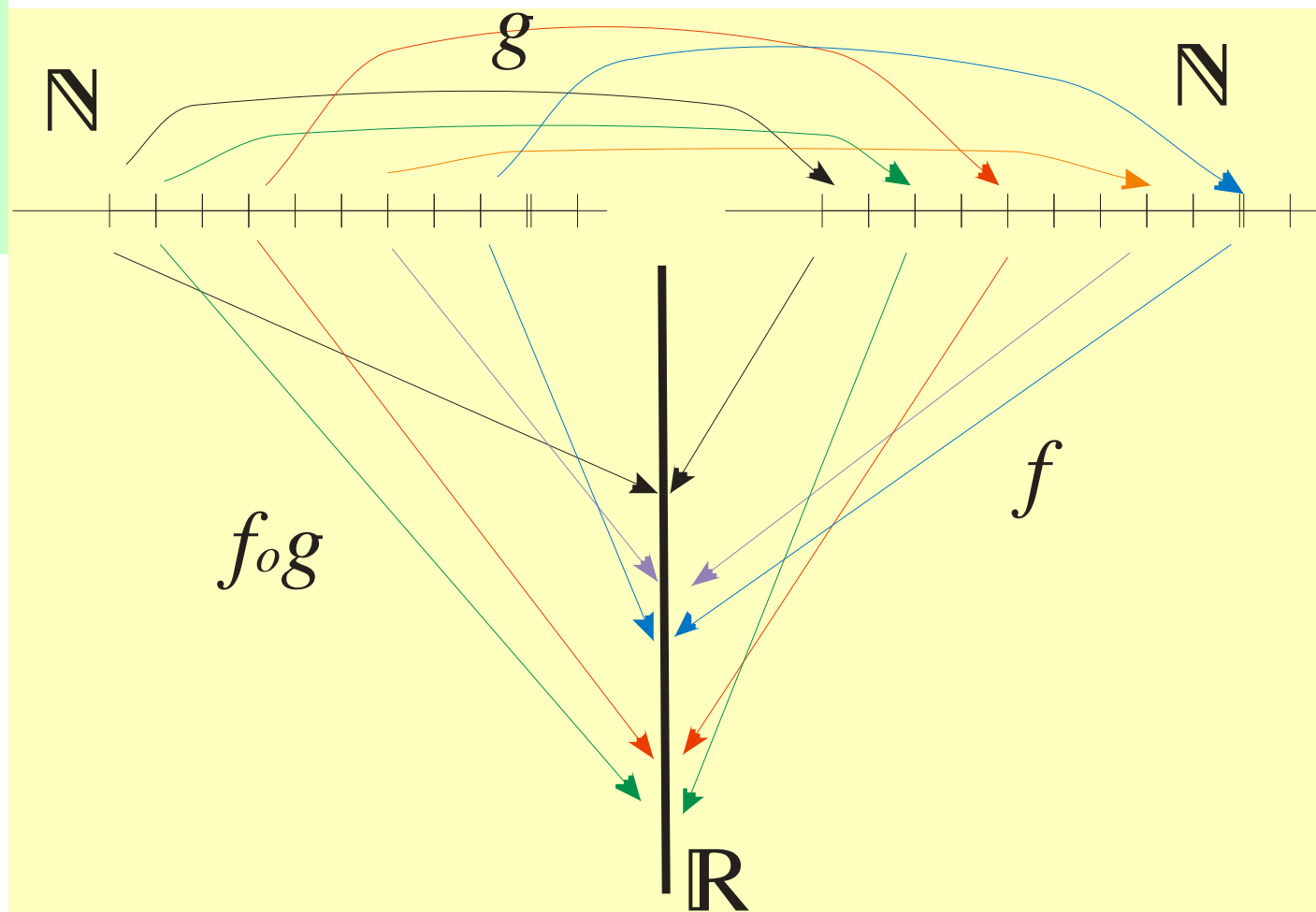
$$b_k = x_{g(k)} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$k \leq g(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Nếu g tăng
 nghiêm cách thì
 $k \leq g(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Ta nói $\{b_k\}$ là
 một dãy con của
 $\{x_n\}$ nếu g
 tăng nghiêm
 cách. Lúc đó ta
 ký hiệu

$$b_k = x_{n_k}$$



$$(b_n = fog(n) = b_n = f(g(n)) = f(n_k))$$

Nếu $g(n) = 2n$ ta ký hiệu $X_{n \atop k}$ là x_{2n}

Nếu $g(n) = 2n+1$ ta ký hiệu $X_{n \atop k}$ là x_{2n+1}

Nếu $g(n) = 5n+3$ ta ký hiệu $X_{n \atop k}$ là x_{5n+3}

Bài toán 21. Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Chứng minh ba điều sau đây tương đương

(1) $\{a_n\}$ hội tụ về a trong \mathbb{R} .

(2) $\{a_n - a\}$ hội tụ về 0 trong \mathbb{R} .

(3) $\{|a_n - a|\}$ hội tụ về 0 trong \mathbb{R} .

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|(x_m - a) - 0| < \varepsilon \quad \forall m > M(\varepsilon')$$

$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$||x_k - a| - 0| < \varepsilon \quad \forall k > K(\varepsilon'')$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{sao cho} \\ |x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N} \quad \text{sao cho} \\ |(x_m - a) - 0| < \varepsilon \quad \forall m > M(\varepsilon')$$

$$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists K(\varepsilon'') \in \mathbb{N} \quad \text{sao cho} \\ ||x_k - a| - 0| < \varepsilon \quad \forall k > K(\varepsilon'')$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{sao cho} \\ |x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N} \quad \text{sao cho} \\ |(x_m - a)| = |x_m - a| < \varepsilon \quad \forall m > M(\varepsilon')$$

$$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists K(\varepsilon'') \in \mathbb{N} \quad \text{sao cho} \\ ||x_k - a|| = |x_k - a| < \varepsilon \quad \forall k > K(\varepsilon'')$$

Để tính $s = \pi + \sqrt{2}$ chúng ta thường làm như sau

$$s = 3,14 + 1,41 \text{ hoặc}$$

$$s = 3,141 + 1,414 \text{ hoặc}$$

$$s = 3,1416 + 1,4142 \dots$$

Ta thử mô hình toán học cho việc làm thông thường này như sau.

Đặt $a_1 = 3,14$, $a_2 = 3,141$, $a_3 = 3,1415$, $a_4 = 3,14159$,

$a_5 = 3,141592$, $a_6 = 3,1415926$, $a_7 = 3,14159265$,

$a_8 = 3,141592653$, $a_9 = 3,1415926535$, \dots ,

$b_1 = 1,41$, $b_2 = 1,414$, $b_3 = 1,4142$, $b_4 = 1,41421$,

$b_5 = 1,414213$, $b_6 = 1,4142135$, $b_7 = 1,41421356$,

$b_8 = 1,414213562$, $b_9 = 1,4142135623$, \dots ,

Ta thấy các dãy số $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ lần lượt là các dãy các số xấp xỉ π và $\sqrt{2}$, hay $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ lần lượt hội tụ π và $\sqrt{2}$

Nay ta đặt

$$s_1 = a_1 + b_1,$$

$$s_2 = a_2 + b_2,$$

$$s_3 = a_3 + b_3,$$

$$s_4 = a_4 + b_4,$$

$$s_5 = a_5 + b_5,$$

...

Theo cách làm thông thường, chúng ta chấp nhận $\{s_n\}$ là dãy số thực xấp xỉ cho số $s = \pi + \sqrt{2}$. Chúng ta sẽ chứng minh việc chấp nhận này là đúng theo bài toán sau.

Bài toán 22. Cho hai số thực a và b và hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$. Giả sử $\{a_n\}$ hội tụ về a và $\{b_n\}$ hội tụ về b . Đặt $c = a + b$ và $c_n = a_n + b_n$ với mọi số nguyên dương n . Chứng minh $\{c_n\}$ hội tụ về c .

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|a_n - a|} < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|b_m - a|} < \varepsilon' \quad \forall m > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|c_k - c|} < \varepsilon'' \quad \forall k > K(\varepsilon'')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|(a_k + b_k) - (a + b)| < \varepsilon'' \quad \forall k > K(\varepsilon'')$$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|a_n - a|} < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|b_m - b|} < \varepsilon' \quad \forall m > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|(a_k + b_k) - (a + b)|} < \varepsilon'' \quad \forall k > K(\varepsilon'')$$

$$(a_k + b_k) - (a + b) = (a_k - a) + (b_k - b)$$

$$|(a_k + b_k) - (a + b)| \leq |a_k - a| + |b_k - b|$$

$$|(a_k + b_k) - (a + b)| < \varepsilon + \varepsilon' \quad \forall k > N(\varepsilon) \text{ và } k > M(\varepsilon')$$

$$|(a_k + b_k) - (a + b)| < \varepsilon + \varepsilon' \quad \forall k > \max \{ N(\varepsilon), M(\varepsilon') \}$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|(a_k + b_k) - (a + b)| < \varepsilon'' \quad \forall k > K(\varepsilon'')$$

$$|(a_k + b_k) - (a + b)| < \varepsilon + \varepsilon' \quad \forall k > \max \{ N(\varepsilon), M(\varepsilon') \}$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$, chọn

$$\varepsilon = \varepsilon' = \frac{1}{2} \varepsilon'' \quad \text{và} \quad K(\varepsilon'') = \max \{ N(\varepsilon), M(\varepsilon') \}$$

Bài toán 23. Cho hai số thực a và b và hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$. Giả sử $\{a_n\}$ hội tụ về a và $\{b_n\}$ hội tụ về b . Đặt $c = a.b$ và $c_n = a_n.b_n$ với mọi số nguyên dương n . Chứng minh $\{c_n\}$ hội tụ về c .

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|a_n - a|} < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|b_m - b|} < \varepsilon' \quad \forall m > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|c_k - c|} < \varepsilon'' \quad \forall k > K(\varepsilon'')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_k.b_k - a.b| < \varepsilon'' \quad \forall k > K(\varepsilon'')$$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|b_m - b| < \varepsilon' \quad \forall m > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_k \cdot b_k - a \cdot b| < \varepsilon'' \quad \forall k > K(\varepsilon'')$$

$$a_k \cdot b_k - a \cdot b = (a_k - a)b_k + a(b_k - b)$$

$$|a_k \cdot b_k - a \cdot b| \leq |a_k - a| |b_k| + |a| |b_k - b|$$

$$|a_k \cdot b_k - a \cdot b| < \varepsilon |b_k| + |a| \varepsilon' \quad \forall k > N(\varepsilon) \text{ và } k > M(\varepsilon')$$

Xử lý $|b_k|$ $|b_k| \leq |b_k - b| + |b| < \varepsilon' + |b| \quad \forall k > M(\varepsilon')$

$$|a_k \cdot b_k - a \cdot b| < \varepsilon \varepsilon' + \varepsilon |b| + |a| \varepsilon' \quad \forall k > N(\varepsilon) \text{ và } k > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|b_m - b| < \varepsilon' \quad \forall m > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_k \cdot b_k - a \cdot b| < \varepsilon'' \quad \forall k > K(\varepsilon'')$$

$$|a_k \cdot b_k - a \cdot b| < \varepsilon \varepsilon' + \varepsilon |b| + |a| \varepsilon' \quad \forall k > N(\varepsilon) \text{ và } k > M(\varepsilon')$$

Giải phương trình $x^2 + (|b| + |a|)x = \varepsilon''$

$$\text{Đặt } \varepsilon = \varepsilon' = x = \frac{\sqrt{(|a| + |b|)^2 + 4\varepsilon''} - |a| - |b|}{2} > 0$$

$$|a_k \cdot b_k - a \cdot b| < \varepsilon'' \quad \forall k > K(\varepsilon'') = \max\{N(\varepsilon), M(\varepsilon')\}$$

Bài toán 23b. Cho số thực a khác không và dãy số thực $\{a_n\}$ sao cho a_n khác không với mọi n . Giả sử $\{a_n\}$ hội tụ về a . Đặt $c_n = a_n^{-1}$ với mọi số nguyên dương n . Chứng minh $\{c_n\}$ hội tụ về a^{-1} .

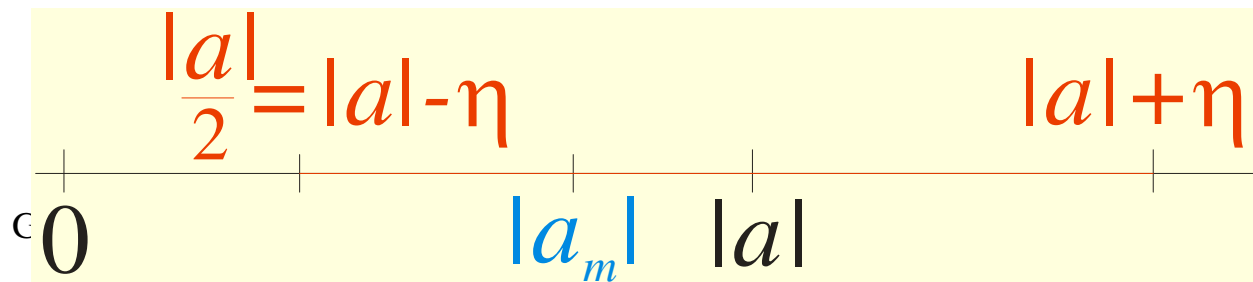
Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$

Cho $\varepsilon' > 0$, tìm $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho $|c_m - a^{-1}| < \varepsilon' \quad \forall m$

$$c_m - a^{-1} = \frac{1}{a_m} - \frac{1}{a} = \frac{a - a_m}{a_m a} \quad \text{Xử lý } \frac{1}{a_m a} \quad \text{Đặt } \eta = \frac{|a|}{2}$$

Có $N(\eta) \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n - a| < \eta \quad \forall n > N(\eta)$

$$\begin{aligned} |a_n| &\geq |a| - |a - a_n| > \\ |a| - \eta &= 2^{-1}|a| \\ \forall n > N(\eta) \end{aligned}$$



Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$

Cho $\varepsilon' > 0$, tìm $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho $|c_m - a^{-1}| < \varepsilon' \quad \forall m$

$$c_m - a^{-1} = \frac{1}{a_m} - \frac{1}{a} = \frac{a - a_m}{a_m a} \quad \text{Xử lý} \quad \frac{1}{a_m a} \quad \text{Đặt } \eta = \frac{|a|}{2}$$

Có $N(\eta) \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n - a| < \eta \quad \forall n > N(\eta)$

$$|a_n| \geq |a| - |a - a_n| > |a| - \eta = 2^{-1}|a| \quad \forall n > N(\eta)$$

$$|c_m - a^{-1}| = \left| \frac{a - a_m}{a_m a} \right| < \frac{2|a - a_n|}{|a|^2} < \frac{2\varepsilon}{|a|^2} \quad \forall m > \max\{N(\varepsilon), N(\eta)\}$$

Bài toán 24. Cho một số thực a và ba dãy số thực $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ và $\{x_n\}$. Giả sử

(i) $a_n \leq x_n \leq b_n$ với mọi số nguyên dương n .

(ii) $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ hội tụ về a .

Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ về a .

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|b_m - a| < \varepsilon' \quad \forall m > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon'' \quad \forall k > K(\varepsilon'')$$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|a_n - a|} < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|b_m - a|} < \varepsilon' \quad \forall m > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|x_k - a|} < \varepsilon'' \quad \forall k > K(\varepsilon'')$$

$$|x_k - a| = |x_k - a_k + a_k - a| \leq |x_k - a_k| + |a_k - a|$$

$$(i) \quad \underbrace{a_k \leq x_k \leq b_k}_{a_n} \Rightarrow |x_k - a_k| \leq |b_k - a_k|$$

$$\begin{array}{c} | \\ \hline a_n \qquad \qquad x_n \qquad \qquad b_n \end{array}$$

$$|x_k - a| \leq |b_k - a_k| + |a_k - a| \leq |b_k - a| + |a_k - a| + |a_k - a|$$

$$|x_k - a| < \varepsilon' + 2\varepsilon \quad \forall k > N(\varepsilon) \text{ và } k > M(\varepsilon')$$

Bài toán 25. Cho hai tập con khác trống A và B trong \mathbb{R} . Giả sử $x \leq y \quad \forall x \in A, \forall y \in B$.

Chứng minh $\sup A \leq \inf B$

Chứng minh $x \leq \inf B \quad \forall x \in A$

$\forall x \in A$, chứng minh $x \leq y \quad \forall y \in B$.

Bài toán 26. Cho hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ sao cho

$$[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n.$$

Chứng minh $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n$

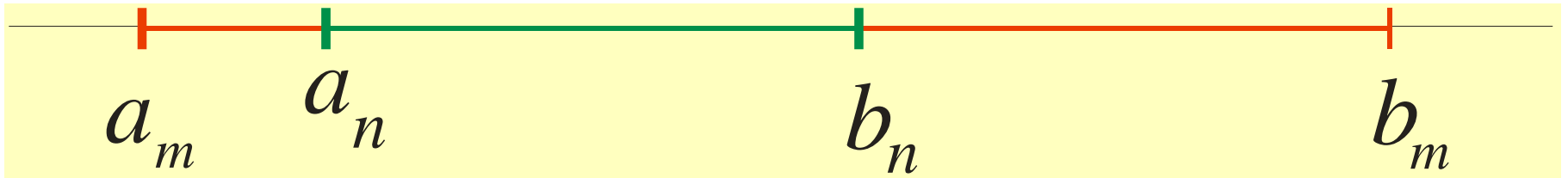
Chứng minh $a_n \leq b_m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$

Chứng minh $a_n \leq b_m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$

$$[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n.$$

$$[a_s, b_s] \subset [a_r, b_r] \quad \forall r, s \in \mathbb{N}, r \leq s.$$

- $m \leq n$: $r = m$ và $s = n$ $[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m]$



$a_n \in [a_n, b_n] \Rightarrow a_n \in [a_m, b_m]$. Vậy $a_n \leq b_m$

- $n \leq m$: $r = n$ và $s = m$ $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$



$b_m \in [a_m, b_m] \Rightarrow b_m \in [a_n, b_n]$. Vậy $a_n \leq b_m$

Bài toán 27. Cho hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ sao cho

$$[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n.$$

Chứng minh $[\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n] \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k]$

Chứng minh $[\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n] \subset [a_k, b_k] \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$x \in [\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n] \stackrel{?}{\Rightarrow} x \in [a_k, b_k] \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq x \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n \stackrel{?}{\Rightarrow} a_k \leq x \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Bài toán 28. Cho hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ sao cho

$$(i) \quad [a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n.$$

$$(ii) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (b_k - a_k) = 0.$$

Chứng minh

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n$$



$$0 \leq \inf_{m \in \mathbb{N}} b_m - \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq b_k - a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|b_n - a_n - 0| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

$$0 \leq \inf_{m \in \mathbb{N}} b_m - \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

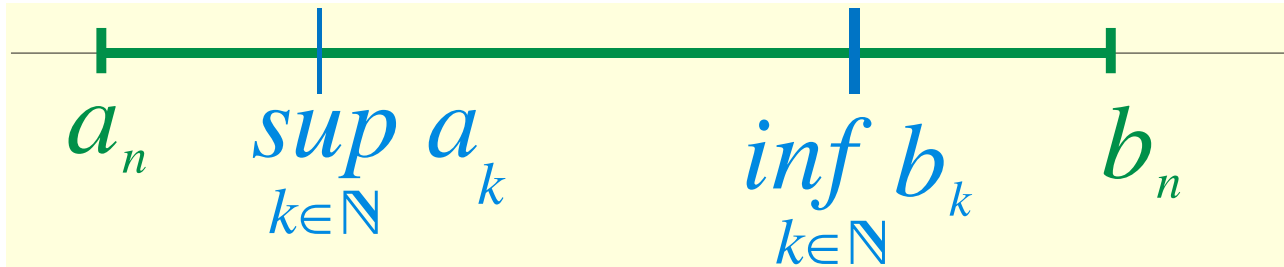
Nếu $0 < \inf_{m \in \mathbb{N}} b_m - \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$, đặt $\varepsilon = \inf_{m \in \mathbb{N}} b_m - \sup_{m \in \mathbb{N}} a_m$

Bài toán 29. Cho hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ sao cho

$$(i) \quad [a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n.$$

$$(ii) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (b_k - a_k) = 0$$

Chứng minh $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$



Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|b_n - a_n - 0| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ tìm $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_n - \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n| < \varepsilon' \quad \forall n > M(\varepsilon')$$

$$|a_n - \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n| < |b_n - a_n| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Bài toán 30. Cho ba dãy số thực $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ và $\{x_n\}$ sao cho

$$(i) \quad [a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n,$$

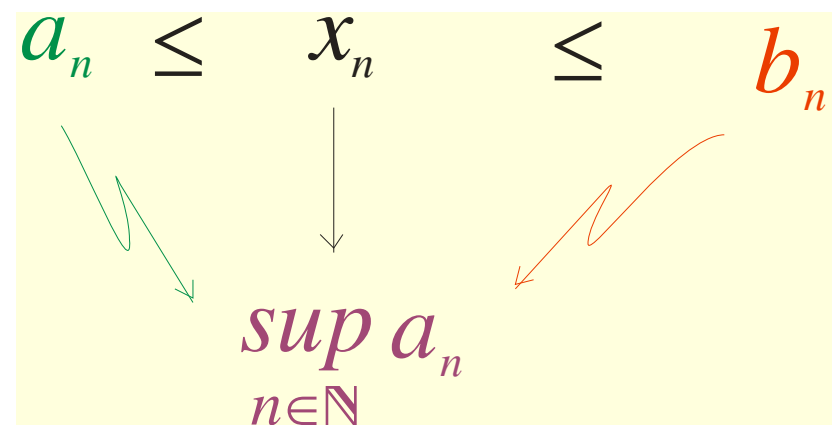
$$(ii) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (b_k - a_k) = 0,$$

$$(iii) \quad x_n \in [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \quad (\text{bài toán 29})$$

$$a_n \leq x_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Cho J là một tập con trong \mathbb{N} và J có vô hạn phần tử.

Dùng qui nạp toán học ta đặt

$$n_1 = \min J$$

$$n_2 = \min J \setminus [0, n_1]$$

$$n_3 = \min J \setminus [0, n_2]$$

$$n_{k+1} = \min J \setminus [0, n_k] \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ta thấy $\{n_k\}$ là một dãy đơn điệu tăng trong \mathbb{N}

Vậy $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của dãy $\{x_n\}$

Bài toán 31. Cho một ánh xạ f từ \mathbb{N} vào tập $\{1, 2, \dots, 9\}$.
Đặt $x_n = f(n)$ với mọi số nguyên dương n . Tìm một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $\{x_{n_k}\}$ hội tụ.

Đặt $I_m = \{n \in \mathbb{N} : x_n = m\}$ với mọi $m \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

$$I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_9 = \mathbb{N}$$

Có $r \in \{1, 2, \dots, 9\}$ sao cho I_r là tập có vô hạn phần tử

Đặt $J = I_r$ và lập dãy $\{x_{n_k}\}$ tương ứng với J .

Vì $n_k \in J = I_r$, $x_{n_k} = r$ với mọi số nguyên dương k .

Cho $\varepsilon > 0$, ta thấy: $|x_{n_k} - r| = 0 < \varepsilon \quad \forall k \geq 1$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = r$$

Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Cho $\{J_n\}$ là một họ đếm được các tập con trong \mathbb{N} . Giả sử J_n có vô hạn phần tử và $J_{n+1} \subset J_n$ với mọi số nguyên dương n .

Dùng qui nạp toán học ta đặt

$$n_1 = \min J_1$$

$$n_2 = \min J_2 \setminus [0, n_1]$$

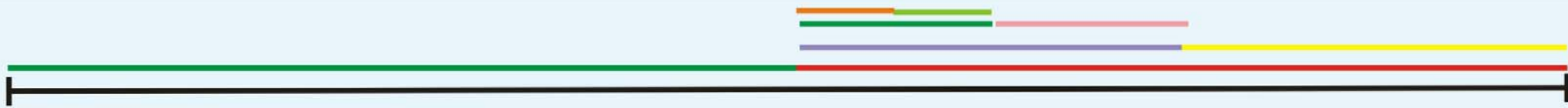
$$n_3 = \min J_3 \setminus [0, n_2]$$

$$n_{k+1} = \min J_{k+1} \setminus [0, n_k] \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

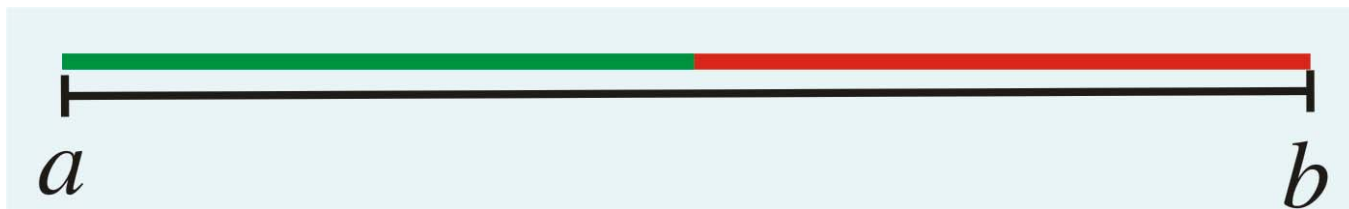
Ta thấy $\{n_k\}$ là một dãy đơn điệu tăng trong \mathbb{N}

Vậy $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của dãy $\{x_n\}$

Định lý 6.1 (Bolzano- Weierstrass) Cho a và b là hai số thực và $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Giả sử $a < b$ và $x_n \in [a,b]$ với mọi số nguyên n . Lúc đó có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của dãy $\{x_n\}$ sao cho $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về $x \in [a, b]$.



Định lý (Bolzano- Weierstrass) Cho a và b là hai số thực và $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Giả sử $a < b$ và $x_n \in [a, b]$ với mọi số nguyên $n \in \mathbb{N}$. Lúc đó có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của dãy $\{x_n\}$ sao cho $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về x trong $[a, b]$.



$$J'_1 = \{ n \in \mathbb{N} : x_n \in \text{---} \} \quad J''_1 = \{ n \in \mathbb{N} : x_n \in \text{---} \}$$

Vì $J'_1 \cup J''_1 = \mathbb{N}$. Nên một trong hai tập J'_1 và J''_1 phải có vô hạn phần tử. Ta giả sử J'_1 có vô hạn phần tử.

Đặt $[a_1, b_1] = \text{---}$, ta có $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ và $(b_1 - a_1) = 2^{-1}(b - a)$

$$J'_1 = \{ n \in \mathbb{N} : x_n \in \text{---} \} \quad J''_1 = \{ n \in \mathbb{N} : x_n \in \text{---} \}$$

$$J'_2 = \{ n \in J'_1 : x_n \in \text{---} \} \quad J''_2 = \{ n \in J'_1 : x_n \in \text{---} \}$$

Vì $J'_2 \cup J''_2 = J''_1$. Nên một trong hai tập J'_2 và J''_2 phải có vô hạn phần tử. Ta giả sử J''_2 có vô hạn phần tử. Và đặt $J_2 = J''_2$.

Đặt $[a_2, b_2] = \text{---}$

Ta có : $J_2 \subset J_1$, $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, và $(b_2 - a_2) = 2^{-2}(b - a)$

$$J'_2 = \{ n \in J'_1 : x_n \in \text{---} \} \quad J''_2 = \{ n \in J'_1 : x_n \in \text{---} \}$$

$$J'_3 = \{ n \in J''_2 : x_n \in \text{---} \} \quad J''_3 = \{ n \in J''_2 : x_n \in \text{---} \}$$

Vì $J'_3 \cup J''_3 = J''_2$. Nên một trong hai tập J'_3 và J''_3 phải có vô hạn phần tử. Ta giả sử J''_3 có vô hạn phần tử. Và đặt $J_3 = J''_3$.

$$\text{Đặt } [a_3, b_3] = \text{---}$$

Ta có : $J_3 \subset J_2 \subset J_1$, $[a_3, b_3] \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, và

$$(b_3 - a_3) = 2^{-3} (b - a)$$

$$J_3' = \{n \in J_2'' : x_n \in \begin{array}{c} \text{green} \\ \text{yellow} \\ \text{orange} \end{array}\} \quad J_3'' = \{n \in J_2'' : x_n \in \begin{array}{c} \text{pink} \\ \text{yellow} \\ \text{orange} \end{array}\}$$

$$J_4' = \{n \in J_3'' : x_n \in \begin{array}{c} \text{orange} \\ \text{pink} \\ \text{orange} \end{array}\} \quad J_4'' = \{n \in J_3'' : x_n \in \begin{array}{c} \text{purple} \\ \text{pink} \\ \text{orange} \end{array}\}$$

Vì $J_4' \cup J_4'' = J_3''$. Nên một trong hai tập J_4' và J_4'' phải có vô hạn phần tử. Ta giả sử J_4' có vô hạn phần tử. Và đặt $J_4 = J_4'$.

$$\text{Đặt } [a_4, b_4] = \begin{array}{c} \text{orange} \\ \text{pink} \\ \text{yellow} \\ \text{orange} \end{array}$$

Ta có : $J_4 \subset J_3 \subset J_2 \subset J_1$,
 $[a_4, b_4] \subset [a_3, b_3] \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, và
 $(b_4 - a_4) = 2^{-4} (b - a)$

$x_n \in [a, b]$ với mọi số nguyên $n \in \mathbb{N}$. Lúc đó có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của dãy $\{x_n\}$ sao cho $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về x trong $[a, b]$.

Dùng qui nạp toán học, ta tìm được các số thực $a_1, \dots, a_n, \dots, b_1, \dots, b_n, \dots$ sao cho $a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ và

- $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$
- $(b_n - a_n) = 2^{-n} (b - a) \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
- Nếu đặt $J_n = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in [a_n, b_n]\}$, thì J_n có vô hạn phần tử và $J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \dots \supset J_n \supset \dots$

Lúc đó $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Chọn dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $n_k \in J_k, \forall k \in \mathbb{N}$.
Ta có $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$. Vậy $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$

Định nghĩa . Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực . Ta nói dãy $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy nếu và chỉ nếu

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{sao cho}$$
$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n > m > N(\varepsilon)$$

Bài toán 32. Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực hội tụ về a . Chứng minh $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{sao cho}$$
$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{sao cho}$$
$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n > m > N(\varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N} \quad \text{sao cho}$$
$$|x_n - x_m| < \varepsilon' \quad \forall n > m > M(\varepsilon')$$

Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực hội tụ về a . Chứng minh $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x_m| < \varepsilon' \quad \forall n > m > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ tìm $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x_m| < \varepsilon' \quad \forall n > m > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ tìm $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x_m| < \varepsilon' \quad \forall n > m > M(\varepsilon')$$

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m|$$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon + \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon)$$

$$\varepsilon + \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon'$$

$$M(\varepsilon') \Leftrightarrow N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$, ta chọn $\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon'$ và $M(\varepsilon') = N(\varepsilon)$

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon' \quad \forall n > m > M(\varepsilon')$$

Bài toán 33. Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực Cauchy .
Chứng minh $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ bị chặn trong \mathbb{R}

Tìm một số thực M sao cho $|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$-M \leq x_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq N(\varepsilon)$$

Tìm một số thực M sao cho $|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$|x_n| \leq |x_n - x_m| + |x_m| < \varepsilon + |x_m| \quad \forall n > m \geq N(\varepsilon)$$

$$\varepsilon = 1, m = N(1) : \quad |x_n| < 1 + |x_{N(1)}| \quad \forall n > N(1)$$

$$\text{Đặt } M = \max \{ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N(1)-1}|, 1 + |x_{N(1)}| \}$$

Bài toán 34. Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực Cauchy và a là một số thực. Giả sử $\{x_n\}$ có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về a . Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ về a .

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n > m > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $K(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon' \quad \forall k > K(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $M(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon'' \quad \forall n > M(\varepsilon'')$$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $K(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_k - a| < \varepsilon' \quad \forall k > K(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $M(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_m - a| < \varepsilon'' \quad \forall m > M(\varepsilon'')$$

$$|x_m - a| \leq |x_m - x_n| + |x_n - a| < \varepsilon + |x_n - a| \quad \forall n \geq m \geq N(\varepsilon)$$

$$|x_m - a| < \varepsilon + |x_n - a| \quad \forall m \geq N(\varepsilon)$$

$$|x_m - a| < \varepsilon + \varepsilon' \quad \forall m \geq N(\varepsilon), m > K(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$. Đặt

$$\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon''/2 \quad \text{và} \quad M(\varepsilon'') = \max \{ N(\varepsilon), K(\varepsilon') \}$$

Bài toán 35. Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực Cauchy.
Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ.

Có một số thực dương M sao cho

$$|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Có một số thực dương M sao cho

$$x_n \in [-M, M] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\{x_n\}$ có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về a .

$\{x_n\}$ hội tụ về a .

Bài toán 36. Cho n là một số nguyên dương . Đặt

$$x_n = (2!)^{-1} + (4!)^{-1} + (6!)^{-1} + \dots + (2n!)^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ .

Chứng minh $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n > m > N(\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} x_n - x_m &= [(2!)^{-1} + \dots + (2m!)^{-1} + (2(m+1)!)^{-1} + \dots + (2n!)^{-1}] \\ &\quad - [(2!)^{-1} + \dots + (2m!)^{-1}] = (2(m+1)!)^{-1} + \dots + (2n!)^{-1} \end{aligned}$$

$$|x_n - x_m| \leq 2^{-m-1} + \dots + 2^{-n} + \dots \leq 2^{-m} \quad \forall n > m$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $2^{-m} < \varepsilon \quad \forall n > m > N(\varepsilon)$

```
In [1] := N[Sum[1 / ((2*i)!), {i, 1, 11}]]
```

```
Out [1] = 0.543081
```

```
In [2] := N[Sum[1 / ((2*i)!), {i, 1, ∞}], 13]
```

```
Out [2] = 0.543081
```

```
In [4] := N[Sum[1 / ((2*i)!), {i, 1, ∞}], 140]
```

```
Out [4] = 0.5430806348152437784779056  
2075706168260152911236586370473740  
2214710769063049223698964264726435  
54303558704685860  
442352756503219469470958629076
```

```
In [4] := N[Sum[1 / ((2*i)!) , {i, 1, Infinity}], 25]
```

```
Out [4] = 0.5430806348152437784779056
```

```
In [2] := Sum[1 / ((2*i)!) , {i, 1, ∞}]
```

```
Out [2] = { (Sqrt[2/π] - 2 E Sqrt[2/π] +  
E^2 Sqrt[2/π]) Sqrt[π/2] } / (2E)
```

```
In [3] := Simplify[ (Sqrt[2/π] -  
2E Sqrt[2/π] +  
E^2 Sqrt[2/π]) Sqrt[π/2] } / (2E) ]
```

```
Out [3] = [ 2(-1 + E) ] / 2E
```

Bài toán 37. Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực đơn điệu tăng và bị chặn trên. Đặt $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Lúc đó $\{a_n\}$ sẽ hội tụ về $a = \sup A$

$$a_m \leq a_n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$$

$$a = \sup A$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

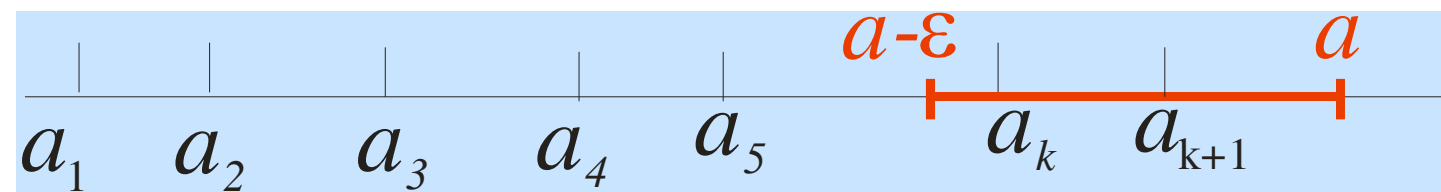
$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$0 \leq a - a_n < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$a - \varepsilon < a_n \quad \forall n > N(\varepsilon)$$



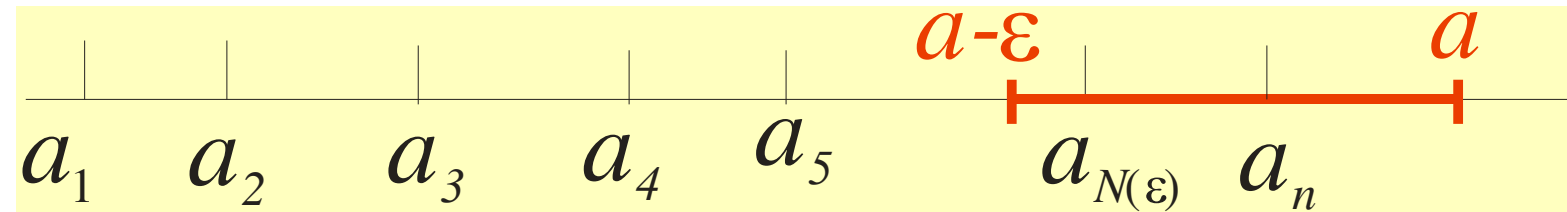
$$a_m \leq a_n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m \leq n$$

$$a = \sup A$$

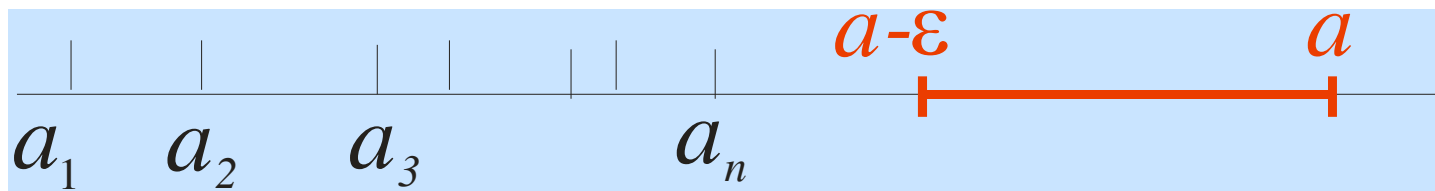
Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$a - \varepsilon < a_n \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$a - \varepsilon < a_{N(\varepsilon)} \leq a_n \quad \forall n > N(\varepsilon)$$


Giả sử $a_m \leq a - \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N}$



$a - \varepsilon$ là một chặn trên của A

Bài toán 38. Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực đơn điệu tăng và không bị chặn trên. Lúc đó $\{a_n\}$ sẽ hội tụ về ∞

$$a_m \leq a_n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$$

$\forall M \in \mathbb{R}$ ta có một $n \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n \geq M$

$\forall M > 0$ ta tìm một $N \in \mathbb{N}$ sao cho $a_m \geq M \quad \forall m \geq N$.

Bài toán 39. Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực đơn điệu giảm và bị chặn dưới. Đặt $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Lúc đó $\{a_n\}$ sẽ hội tụ về $a = \inf A$

Bài toán 40. Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực đơn điệu giảm và không bị chặn dưới. Lúc đó $\{a_n\}$ sẽ hội tụ về $-\infty$.

limsup

Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt

$$A_n = \{a_m : m \geq n\}$$

$$A_1 \supset A_n \supset A_m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq m$$

■ Nếu A_1 không bị chặn trên. Đặt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt

$$A_n = \{a_m : m \geq n\}$$

$$A_1 \supset A_n \supset A_m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq m$$

■ Nếu A_1 bị chặn trên. Đặt

$$b_m = \sup A_m$$

$$b_1 \geq b_m \geq b_n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq m$$

• Nếu $\{b_n\}$ không bị chặn dưới, đặt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt

$$A_n = \{a_m : m \geq n\}$$

$$A_1 \supset A_m \supset A_n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq m$$

■ Nếu A_1 bị chặn trên. Đặt

$$b_m = \sup A_m$$

$$b_1 \geq b_m \geq b_n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq m$$

• Nếu $\{b_n\}$ bị chặn dưới, đặt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{n \geq m} a_n))$$

Cho $a_n = (-1)^n n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$$A_n = \{a_m : m \geq n\} = \{(-1)^m m : m \geq n\}$$

$$A_n = \{(-1)^m m : m \geq n\} \supset \{2k : k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$$

$$A_1 \text{ không bị chặn trên} \implies \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Cho $a_n = -n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$$A_n = \{a_m : m \geq n\} = \{-m : m \geq n\} \subset (-\infty, 0]$$

A_1 bị chặn trên

$$b_n = \sup A_n = \sup \{-k : k \geq n\} = -n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\{b_n\} = \{-m : m \in \mathbb{N}\}$ không bị chặn dưới

$$\implies \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

Cho $a_n = (-1)^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$$A_n = \{a_m : m \geq n\} = \{(-1)^m : m \geq n\} = \{1, -1\}$$

A_1 bị chặn trên

$$b_m = \sup A_m = \sup \{1, -1\} = 1$$

$$\{b_n\} \text{ bị chặn dưới} \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$$

Ta thấy $\{a_m\}$ không hội tụ nhưng vẫn có

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

liminf

Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt

$$A_n = \{a_k : k \geq n\}$$

$$x \in A_n \Leftrightarrow \exists k \geq n \text{ sao cho } x = a_k$$

$$n \geq m : x \in A_n \Leftrightarrow \exists k \geq n \geq m \text{ sao cho } x = a_k$$

$$\exists k \geq m \text{ sao cho } x = a_k \Leftrightarrow x \in A_m$$

$$A_1 \supset A_m \supset A_n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq m$$

■ Nếu A_1 không bị chặn dưới. Đặt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt

$$A_n = \{a_k : k \geq n\}$$

$$A_1 \supset A_m \supset A_n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq m$$

■ Nếu A_1 bị chặn dưới. Đặt

$$c_m = \inf A_m$$

$$c_m \leq a_k \quad \forall k \geq m$$

$$n \geq m : c_m \leq a_k \quad \forall k \geq m$$

$$c_n = \inf A_n$$

$$c_1 \leq c_m \leq c_n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq m$$

• Nếu $\{c_n\}$ không bị chặn trên, đặt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt

$$A_k = \{a_k : m \geq n\}$$

$$A_1 \supset A_m \supset A_n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq m$$

■ Nếu A_1 bị chặn dưới. Đặt

$$c_m = \inf A_m$$

$$c_1 \leq c_m \leq c_n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq m$$

• Nếu $\{c_n\}$ bị chặn trên, đặt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \quad (= \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{n \geq m} a_n))$$

Cho $a_n = (-1)^n n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$$A_n = \{a_m : m \geq n\} = \{(-1)^m m : m \geq n\}$$

$$A_1 = \{(-1)^m m : m \geq 1\} \supset \{-2k - 1 : k \geq 1\}$$

A_1 không bị chặn dưới $\Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

Cho $a_n = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$$A_n = \{a_m : m \geq n\} = \{m : m \geq n\} \subset [n, \infty]$$

A_1 bị chặn dưới

$$c_n = \inf A_n = \inf \{k : k \geq n\} = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\{c_n\} = \mathbb{N}$ không bị chặn trên

$\Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

Cho $a_n = (-1)^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$$A_n = \{a_m : m \geq n\} = \{(-1)^m : m \geq n\} = \{-1, 1\}$$

A_1 bị chặn dưới

$$c_m = \inf A_m = \inf \{-1, 1\} = -1$$

$$\{c_n\} \text{ bị chặn trên} \implies \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -1$$

Ta thấy $\{a_m\}$ không hội tụ nhưng vẫn có

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1 \quad . \quad \text{Mặt khác} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

Trong trường hợp này $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$,

Bài toán 41. Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Giả sử $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ và $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ đều là các số thực. Chứng minh

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$A_m = \{a_k : k \geq m\}$$

$$b_m = \sup A_m$$

$$c_m = \inf A_m$$

$$b_m \geq a_m \geq c_m$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_m \geq \lim_{m \rightarrow \infty} c_m$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Bài toán 42. Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Giả sử :

$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ và $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ đều là các số thực và bằng nhau.

Chứng minh $\{a_n\}$ hội tụ và $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$A_m = \{a_k : k \geq m\}$$

$$b_m = \sup A_m$$

$$c_m = \inf A_m$$

$$c_m \leq a_m \leq b_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$c_n \leq a_n \leq b_n$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} c_m = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Bài toán 43. Cho một dãy số thực $\{a_n\}$ hội tụ về a .

Chứng minh $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$

$A_m = \{a_n : n \geq m\}$ $b_m = \sup A_m$ $c_m = \inf A_m$

$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m$ $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} c_m$

$|a_n - a| \leq \varepsilon$ $-\varepsilon \leq a_n - a \leq \varepsilon$ $a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N(\varepsilon)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : a - \varepsilon \leq c_m \leq b_m \leq a + \varepsilon \quad \forall m \geq N(\varepsilon)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|c_m - a| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq N(\varepsilon)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|b_m - a| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq N(\varepsilon)$

Cho một dãy số thực $\{a_n\}$ hội tụ về a . Chứng minh

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$

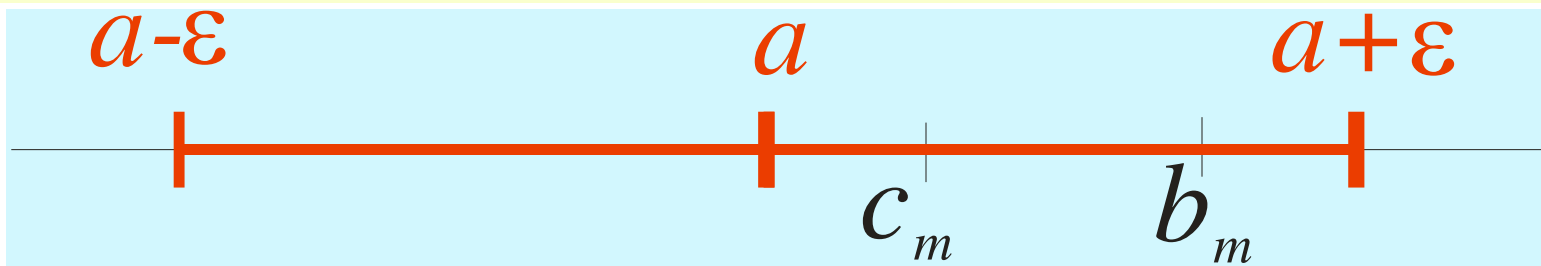
$$A_m = \{a_n : n \geq m\}$$

$$b_m = \sup A_m \quad c_m = \inf A_m$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} c_m$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : a - \varepsilon \leq c_m \leq b_m \leq a + \varepsilon \quad \forall m \geq N(\varepsilon)$



$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|c_m - a| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq N(\varepsilon)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|b_m - a| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq N(\varepsilon)$

Bài toán 44. Cho A là một tập khác rỗng bị chặn trên trong \mathbb{R} . Đặt $B = \{-x : x \in A\}$. Chứng minh B bị chặn dưới và $\sup A = -\inf B$

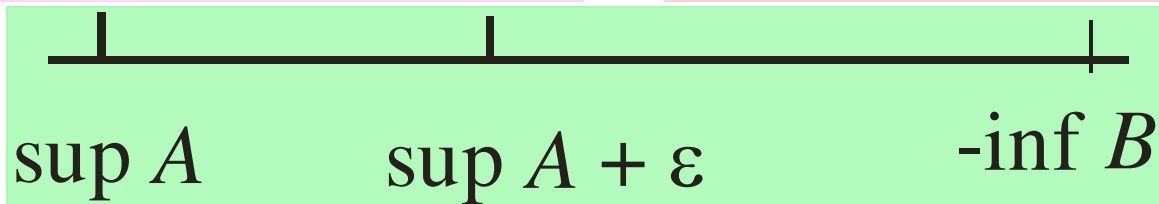
$\sup A \leq -\inf B$? $\sup A \geq -\inf B$?

$\sup A \leq -\inf B$? $x \leq -\inf B \quad \forall x \in A$

$-x \geq \inf B \quad \forall x \in A$ $y = -x \geq \inf B \quad \forall x \in A$

$B = \{-x : x \in A\}$. $y \geq \inf B \quad \forall y \in B$

$\sup A \geq -\inf B$? $\sup A < -\inf B$?



$\exists \varepsilon > 0 : \sup A + \varepsilon < -\inf B$

$$\exists \varepsilon > 0 : \sup A + \varepsilon < - \inf B$$

$$\exists \varepsilon > 0 : \sup A < - \varepsilon - \inf B$$

$$x < - \varepsilon - \inf B \quad \forall x \in A$$

$$B = \{-x : x \in A\}. \quad -x > \varepsilon + \inf B \quad \forall x \in A$$

$$y = -x > \varepsilon + \inf B \quad \forall x \in A$$

$$y > \varepsilon + \inf B \quad \forall y \in B$$

$\varepsilon + \inf B$ là một chặn dưới của B

Bài toán 45. Cho A là một tập khác rỗng bị chặn dưới trong \mathbb{R} . Đặt $B = \{-x : x \in A\}$. Chứng minh B bị chặn trên và $\inf A = - \sup B$

Bài toán 46. Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt $b_n = -a_n$
 $\forall n \in \mathbb{N}$. Chứng minh $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$

$$A_m = \{a_n : n \geq m\}$$

$$B_m = \{b_n = -a_n : n \geq m\}$$

$$d_m = \sup A_m$$

$$t_m = \inf B_m$$

$$t_m = -\sup A_m = -d_m$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} d_m$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{m \rightarrow \infty} t_m$$

Bài toán 47. Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt $b_n = -a_n$
 $\forall n \in \mathbb{N}$. Chứng minh $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$

Cho $\{x_m\}$ là một dãy số thực. Với mọi số nguyên $n \in \mathbb{N}$ ta đặt

$$s_n = x_1 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i \quad .$$

Ta gọi s_n là **tổng riêng phần thứ n** của dãy $\{x_m\}$.

■ Nếu dãy số thực $\{s_n\}$ hội tụ về một số thực s ta có thể coi s như là “**tổng số**” của các số trong dãy $\{x_m\}$.

Lúc đó ta gọi s là **chuỗi số** của các số trong dãy $\{x_m\}$ và ký hiệu s là $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ và nói **chuỗi số** $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **hội tụ**.

■ Nếu dãy số thực $\{s_n\}$ phân kỳ, ta nói **chuỗi số** $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **phân kỳ**.

Bài toán 48. Chứng minh chuỗi $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}$ hội tụ và

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = 1 .$$

Đặt $x_m = 2^{-m} \forall m \in \mathbb{N}$ và $s_n = 2^{-1} + \dots + 2^{-n} \forall n \in \mathbb{N}$

$$s_n = 2^{-1}(1 + \dots + 2^{-n+1}) = 1 - 2^{-n} \forall n \in \mathbb{N} \text{ (qui nạp toán học)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$$

Bài toán 49. Cho $c \in (0, 1)$. Chứng minh chuỗi $\sum_{m=1}^{\infty} c^m$ hội tụ và

$$\sum_{m=1}^{\infty} c^m = \frac{c}{1-c}$$

Đặt $x_m = c^m \quad \forall m \in \mathbb{N}$ và $s_n = c + \dots + c^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$s_n = c + \dots + c^n = c(1 + \dots + c^{n-1}) = c \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = \frac{c}{1 - c}$$

Bài toán 49. Chuỗi $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m$ phân kỳ .

Đặt $x_m = (-1)^m$ với mọi $m \in \mathbb{N}$ và

$$s_n = (-1)^1 + \dots + (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$s_n = -1$ nếu n lẻ và $s_n = 0$ nếu n chẵn .

$\{s_n\}$ không là một dãy Cauchy

$\{s_n\}$ không hội tụ

Chuỗi $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m$ phân kỳ .

Định lý (Tiêu chuẩn Cauchy). Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực. Lúc đó chuỗi số $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hội tụ nếu và chỉ nếu với mọi số thực $\varepsilon > 0$, có một số nguyên dương $N(\varepsilon)$ sao cho

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N(\varepsilon)$$

$$s_r = \sum_{k=1}^r a_k \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

$$s_n - s_m = \sum_{k=m}^n a_k \quad \forall n \geq m$$

Cho $\varepsilon > 0$, có một số nguyên dương $N(\varepsilon)$ sao cho

$$|s_n - s_m| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N(\varepsilon) .$$

$\{s_n\}$ Cauchy

$\{s_n\}$ hội tụ

HUONG $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hội tụ

Định lý . Cho $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ và $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ là hai chuỗi số thực hội tụ. Lúc đó $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ hội tụ và

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Đặt

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$v_n = \sum_{k=1}^n b_k$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$$

$$s_n = u_n + v_n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$$

Bài toán 50. Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực. Giả sử chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hội tụ. Chứng minh dãy $\{a_n\}$ hội tụ về 0.

Với mọi số thực $\varepsilon > 0$, có một số nguyên dương $N(\varepsilon)$ sao cho

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N(\varepsilon)$$

Với mọi số thực $\varepsilon' > 0$, tìm một số nguyên dương $K(\varepsilon')$ sao cho

$$\left| a_k - 0 \right| \leq \varepsilon' \quad \forall k \geq K(\varepsilon')$$

$$\left| a_k - 0 \right| = \left| a_k \right| = \left| \sum_{i=k}^k a_i \right| < \varepsilon \quad \forall k \geq N(\varepsilon)$$

Định lý (Tiêu chuẩn so sánh) Cho một dãy số thực không âm $\{a_n\}$. Giả sử chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hội tụ. Cho một dãy số thực $\{b_n\}$ sao cho có $N \in \mathbb{N}$ để cho

$$|b_n| \leq a_n \quad \forall n \geq N.$$

Lúc đó $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ hội tụ.

$$\left| \sum_{k=m}^n b_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |b_k| \leq \sum_{k=m}^n a_k \quad \forall n \geq m$$

Định lý (Tiêu chuẩn căn số) Cho một dãy số thực $\{b_n\}$. Giả sử có một số thực dương $c \in (0, 1)$ và một số nguyên N sao cho $|b_n|^{1/n} \leq c \quad \forall n \geq N$.

Lúc đó $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ hội tụ.

Đặt $a_n = c^n \quad \forall n \geq N$

$|b_n| \leq a_n \quad \forall n \geq N$

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ hội tụ

Định lý (Tiêu chuẩn tỉ số) Cho một dãy số thực khác không $\{a_n\}$, một số thực dương $c \in (0, 1)$ và một số nguyên N . Giả sử

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < c \quad \forall n \geq N$$

Lúc đó $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

Qui nạp toán học : $|a_n| \leq c^{n-N} |a_N| \quad \forall n \geq N$

Đặt $b_n = c^{n-N} |a_N|$

Định lý (Tiêu chuẩn tỉ số) Cho một dãy số thực $\{a_n\}$ và một số nguyên N . Giả sử

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \forall n \geq N$$

Lúc đó $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Qui nạp toán học : $|a_n| \geq |a_N| > 0 \quad \forall n \geq N$

Suy ra ta không có $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Định lý (Tiêu chuẩn Leibnitz) Cho một dãy số thực $\{a_n\}$ sao cho $\{|a_n|\}$ là một dãy đơn điệu giảm hội tụ về 0 và

$$a_m \cdot a_{m+1} \leq 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Lúc đó $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Định lý (Tiêu chuẩn tích phân) Cho một dãy số thực $\{a_n\}$ sao cho có một số nguyên N và một hàm số f đơn điệu giảm từ $[N, \infty)$ vào $[0, \infty)$ sao cho

$$a_n = f(n) \quad \forall n \geq N.$$

Lúc đó chuỗi số thực $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nếu và chỉ nếu

$$\int_N^{\infty} f(t) dt < \infty$$