

Estimation

Chapitre 4 Estimation des paramètres de modèles ARMA(p,q)

CourTS_Ch5EstimARMA_v071008

Auteur B Truong-van

Extrait de CourTS_versioncomplete_v1 Chapitre 4 Traitements statistiques pour des modèles ARMA stationnaires

et CourTS_EstimIdentif

et CourTS_EstimARMA_vf1

MAJ 07/10/08

1- Estimations préliminaires des paramètres de modèles ARMA(p,q)

1-1 Estimations préliminaires des paramètres MA de modèles ARMA(p,q)

(Est-ce que l'on a les mêmes résultats que celui ci-dessous pour l'estimation préliminaires des paramètres MA de modèles ARMA(p,q)???)

On considère comme estimateurs des paramètres MA(q) ceux déduits de l'algorithme des innovations: Définir les estimateurs $\hat{\theta}_{m,j}, j = 1, \dots, m$ des $\theta_{m,j}, j = 1, \dots, m$ en remplaçant dans les formules de l'algorithme des innovations v_k par \hat{v}_k et C_x par \hat{C}_x .

Proposition 0.1. *Sous les conditions*

(modèle inversible) $\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j x_{t-j}$; $m(n) \rightarrow \infty; m = o(n^{1/3})$

$n^{1/2} \sum_{j>m(n)} |\pi_j| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

alors:

(i) $n^{1/2}(\hat{\phi}_{m,1} + \pi_1, \dots, \hat{\phi}_{m,m} + \pi_m, 0, \dots) \rightarrow^d N(0, \Lambda)$

$\Lambda = \left[\sum_{k=0}^{\min(i,j)-1} \pi_k \pi_{k+|i-j|} \right]_{i,j=1}^{\infty}$

(ii) $\hat{\theta}_{(m)} - \theta_{(m)} = B_m(\hat{\phi}_{(m)} - \phi_{(m)}) + o_P(n^{1/2})$

1-2- Estimations préliminaires des paramètres AR de modèles ARMA(p,q)

Remarque

Les estimateurs LS ou YW de paramètres AR d'un ARMA(p,q) SLC sont non-consistants quand $q \geq 1$!!!

Il faut considérer les estimations ILS qui sont consistants quand ils sont définis. On peut les calculer par l'Algorithme de LD généralisé ou ILS (voir § Identification de modèles ARMA(p,q))

Rappel:

Proposition 0.2. ARMA(p,q) \Leftrightarrow p,q smallest tq (r), r = 1, ...,

(1) $\theta(k, i) = 0, (k, i) \in I_{p,q}$

(2) $\phi_{pp}^{(i)} = \phi_p, i \geq q; \phi_{kk}^{(q)} = 0, k \geq p + 1$

(3) $f_{GI}^{(i)}(k) = 0, (k, i) \in I_{p,q}$

(4) $f_{Ta}^{(i)}(k) = 0, (k, i) \in J_{p,q}$ (car par convention, on a posé $f_{Ta}^{(i)}(k) = 0$ si B(k,i) singulier: Ce n'est qu'une commodité d'écriture sans fondement (A verif))

(5) $f_{Co}^{(i)}(k) = D(k, i) = 0, (k, i) \in J_{p+1,q+1}; D(k, i) \neq 0, (k, i) \in I_{p,q}$

(6) $R_{p+1}(\rho_{-p \pm (q+j)}) = 0, j \geq 1; R_{p+1}(\rho_{-p \pm q}) \neq 0$

(1) Algorithme de D-L simple

k=0: (v(0)=1) $\phi_{1,1}^{(0)} = \rho_X(1); v(1) = 1 - (\phi_{1,1}^{(0)})^2$

k \geq 1 : $T(k) = \rho_X(k + 1) - \sum_{l=1}^k \phi_{k,l}^{(0)} \rho_X(k + 1 - l)$

$\phi_{k+1,k+1}^{(0)} = T(k)/v(k)$

Pour j=1,...,k : $\phi_{k+1,j}^{(0)} = \phi_{k,j}^{(0)} - \phi_{k+1,k+1}^{(0)} \phi_{k,k+1-j}^{(0)}$

$v(k + 1) = v(k)(1 - (\phi_{k+1,k+1}^{(0)})^2)$

(2) Algorithme de D-L généralisé

Pour i=1,2,...

pour k=1,2,...poser $\phi_{k,0}^{(i)} = -1$

pour j=1,...,k $\phi_{k,j}^{(i)} = \phi_{k+1,j}^{(i-1)} - \frac{\phi_{k+1,k+1}^{(i-1)}}{\phi_{k,k}^{(i-1)}} \phi_{k,j-1}^{(i-1)}$

2- Estimation des paramètres de modèle ARMA(p,q) stationnaire
2-1 Estimation de maximum de vraisemblance
2-1-1- Cadre général

Fonction de vraisemblance :

$\mathbf{X}=(X_t)$ un processus *gaussien* centré de fct d'autocov C_x . On dispose de n va d'observation de \mathbf{X} mis sous forme du vecteur $\mathbf{X}_n = (x_1, \dots, x_n)'$ et on note Γ_n la matrice des covariances de \mathbf{X}_n , supposée inversible. Alors la vraisemblance de \mathbf{X}_n est

$$\mathcal{L}(\Gamma_n) = (2\pi)^{-n/2}(\det \Gamma_n)^{-1/2} \exp(-1/2\mathbf{X}_n' \Gamma_n^{-1} \mathbf{X}_n)$$

Expression via les innovations

Soit $U_j = X_j - \tilde{X}_j$ la jème innovation où $\tilde{X}_j = P_{H_{j-1}}(X_j) = E(X_j/X_1, \dots, X_{j-1})$; $H_j = sp(X_1, \dots, X_j)$

On pose $\tilde{\mathbf{X}}_n = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)'$, $\mathbf{U}_n = (U_1, \dots, U_n)'$.

Soient $\theta_{i,j}$, $i, j = 1, \dots$ et resp. v_j les coef et la variance de U_j dans l'algo des innovations

(rappel def des $\theta_{i,j}$: $\tilde{X}_{i+1} = \sum_{j=1}^i \theta_{i,j} U_{i+1-j}$)

On prend la convention que

$$\theta_{i,0} = 1, \theta_{i,j} = 0, i = 0, 1, 2$$

et $j < 0$ et on définit

$$C = [\theta_{i,i-j}]_{i,j=0}^{n-1}; D = \text{diag}[v_1, v_2, \dots, v_n] \text{ (matrice des covariances de } \mathbf{U}_n)$$

Alors d'après les formules de l'algo des innovations , on a

$$\tilde{\mathbf{X}}_n = (C - I)\mathbf{U}_n$$

D'où

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{X}_n - \tilde{\mathbf{X}}_n + \tilde{\mathbf{X}}_n = C\mathbf{U}_n, \Gamma_n = CDC'; \mathbf{X}_n' \Gamma_n^{-1} \mathbf{X}_n = \mathbf{U}_n D^{-1} \mathbf{U}_n = \sum_{j=1}^n U_j^2 / v_j$$

$$\text{et } \det \Gamma_n = (\det C)^2 \det D = v_1 v_2 \dots v_n$$

Par conséquent,

$$\mathcal{L}(\Gamma_n) = (2\pi)^{-n/2} (v_1 v_2 \dots v_n)^{-1/2} \exp(-1/2 \sum_{j=1}^n U_j^2 / v_j)$$

2-1-2- Cas de processus ARMA(p,q) slc gaussien

$X_t = \sum_{k=1}^p \phi_k X_{t-k} + \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}$; $\theta_0 = 1, \varepsilon_t \text{ Nid}(0, \sigma^2)$ et les paramètres sont $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)$; $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$; σ^2

2-1 Innovations et vraisemblance

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{X}_{i+1} = \sum_{j=1}^i \theta_{i,j} (X_{i+1-j} - \tilde{X}_{i+1-j}); 1 \leq i < m = \max(p, q) \\ \tilde{X}_{i+1} = \sum_{k=1}^p \phi_k X_{i+1-k} + \sum_{j=1}^q \theta_{i,j} (X_{i+1-j} - \tilde{X}_{i+1-j}); i \geq m \end{array} \right\}$$

où $\theta_{i,j}$ sont les coefficients de l'algo des innovations appliqué au processus

$$Z_t = \begin{cases} \sigma^{-1}X_t; 1 \leq i \leq m \\ \sigma^{-1}\phi(B)X_t = \theta(B)\varepsilon_t, t \geq m+1 \end{cases}$$

Soit $v_{j+1} = E(U_{j+1}^2) = \sigma^2 r_{j+1}; (U_j = X_j - \tilde{X}_j)$

Proposition 0.3. La vraisemblance de (ϕ, θ, σ^2) pour \mathbf{X}_n est

$$\mathcal{L}(\phi, \theta, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} (r_1 r_2 \dots r_n)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n U_j^2 / r_j\right)$$

et le logarithme de la vraisemblance $L = \text{Log}\mathcal{L}$ est

$$L(\phi, \theta, \sigma^2) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n r_j - \frac{1}{2\sigma^2} S(\phi, \theta) - \frac{n}{2} \text{Ln}(2\pi\sigma^2)$$

où $S(\phi, \theta) = \sum_{j=1}^n U_j^2 / r_j$

2-2 Estimation ML

Les estimations ML $(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}^2)$ de (ϕ, θ, σ^2) satisfont aux Eqs

$\partial L(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}^2) / \partial \phi_k = 0; \partial L(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}^2) / \partial \theta_j = 0$ (Eqs de vraisemblance)

$\hat{\sigma}^2 = n^{-1} S(\hat{\phi}, \hat{\theta}) = n^{-1} \sum_{j=1}^n \hat{U}_j^2 / \hat{r}_j$ (la somme "pondérée" des innovations estimées)

2-3 Matrice des covariances des paramètres (information de Fisher)

On pose $\pi = (\phi, \theta, \sigma^2) = (\pi_1, \dots, \pi_{p+q+1})$ et définit

$$I(\hat{\pi}) = \left[-E\{\partial^2 L(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}^2) / \partial \pi_j \partial \pi_k\} \right]_{j,k=1}^{p+q+1}$$

Alors $V(\hat{\pi}) = I(\hat{\pi})^{-1}$ est la matrice des covariances des estimateurs $\hat{\pi}$

D'après (BD p. 252-253)

$$V(\hat{\phi}, \hat{\theta}) = n^{-1} \sigma^2 \begin{bmatrix} E(\mathbf{U}_t \mathbf{U}_t') & E(\mathbf{U}_t \mathbf{V}_t') \\ E(\mathbf{V}_t \mathbf{U}_t') & E(\mathbf{V}_t \mathbf{V}_t') \end{bmatrix}^{-1}$$

où

$\mathbf{U}_t = (U_t, \dots, U_{t-p+1})'$, $\mathbf{V}_t = (V_t, \dots, V_{t-q+1})'$,

avec U_t un AR(p) slc (centré) et V_t un AR(q) slc (centré) définis resp par les

eqs

$$\begin{aligned}\phi(B)U_t &= \varepsilon_t, \phi(B) = I - \sum_{j=1}^p \phi_j B^j \\ \theta(B)V_t &= \varepsilon_t, \theta(B) = I + \sum_{j=1}^q \theta_j B^j\end{aligned}$$

et où $\tilde{\varepsilon}_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma}$ BB(0,1).

Exemples

1) D'après le cours, $V(\hat{\phi}) = n^{-1}\sigma^2\{E(\mathbf{U}_t\mathbf{U}_t')\}^{-1}$.
où $\mathbf{U}_t = (U_t, \dots, U_{t-p+1})'$, $\phi(B)U_t = \tilde{\varepsilon}_t$, $\phi(B) = I - \sum_{j=1}^p \phi_j B^j$;

Donc,

$V(\hat{\phi}) = n^{-1}\sigma^2\Gamma_p^{-1}$ où $\Gamma_p = E(\mathbf{U}_t\mathbf{U}_t') = \frac{1}{\sigma^2}[E(X_i X_j)]_{1 \leq i, j \leq p}$ et
 $\hat{\phi}$ est aN($\phi, n^{-1}\sigma^2\Gamma_p^{-1}$)

Pour p=1, $\hat{\phi}$ est aN($\phi, n^{-1}\sigma^2(1 - \phi^2)$)

Pour p=2, $\hat{\phi}$ est aN($\phi, n^{-1}\sigma^2\Gamma_2^{-1}$),

$$\Gamma_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \phi_1^2 & -\phi_1(1 + \phi_2) \\ -\phi_1(1 + \phi_2) & 1 - \phi_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Aide : } \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac - b^2} \begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

2) D'après le cours, $V(\hat{\theta}) = n^{-1}\sigma^2\{E(\mathbf{V}_t\mathbf{V}_t')\}^{-1}$. où

$\mathbf{V}_t = (V_t, \dots, V_{t-q+1})'$, $\theta(B)V_t = \tilde{\varepsilon}_t$, $\theta(B) = I + \sum_{j=1}^q \theta_j B^j$.

Donc,

$V(\hat{\theta}) = n^{-1}\sigma^2(\Gamma_q^*)^{-1}$ où $\Gamma_q^* = E(\mathbf{V}_t\mathbf{V}_t') = [E(V_i V_j)]_{1 \leq i, j \leq q}$ et
 $\hat{\theta}$ est aN($\theta, n^{-1}\sigma^2(\Gamma_q^*)^{-1}$)

Pour q=1, $\hat{\theta}$ est aN($\theta, n^{-1}\sigma^2(1 - \theta^2)$)

Pour p=2, $\hat{\theta}$ est aN($\theta, n^{-1}\sigma^2(\Gamma_2^*)^{-1}$),

$$(\Gamma_2^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \theta_1^2 & -\theta_1(1 + \theta_2) \\ -\theta_1(1 + \theta_2) & 1 - \theta_2^2 \end{bmatrix}$$

3) Pour le cas ARMA(1,1)

la matrice des covariances asymptotiques $V(\hat{\phi}, \hat{\theta}) = n^{-1}\sigma^2 \begin{bmatrix} EU_t^2 & EU_t V_t \\ EU_t V_t & EV_t^2 \end{bmatrix}^{-1}$

où $U_t - \phi U_{t-1} = \tilde{\varepsilon}_t$ et $V_t + \theta V_{t-1} = \tilde{\varepsilon}_t$.

Un simple calcul donne (Utilisant $U_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \tilde{\varepsilon}_{t-j}$ et $V_t = \sum_{j=0}^{\infty} (-\theta)^j \tilde{\varepsilon}_{t-j}$

d'où $EU_t V_t = \sum_{j=0}^{\infty} (-\theta\phi)^j E\tilde{\varepsilon}_{t-j}^2$)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} EU_t^2 & EU_t V_t \\ EU_t V_t & EV_t^2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (1 - \phi^2)^{-1} & (1 + \theta\phi)^{-1} \\ (1 + \phi\theta)^{-1} & (1 - \theta^2)^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \\ & = \frac{1 + \theta\phi}{(\theta + \phi)^2} \begin{bmatrix} (1 - \phi^2)(1 + \theta\phi) & -(1 - \phi^2)(1 - \theta^2) \\ -(1 - \phi^2)(1 - \theta^2) & (1 - \theta^2)(1 + \theta\phi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2-2 Estimation LS

2-2-1 Estimation LS (MC) simple (ordinaire) de (ϕ, θ, σ^2) :

Elle est donnée par $(\hat{\phi}_{LS}, \hat{\theta}_{LS}, \hat{\sigma}_{LS}^2)$ défini comme suit

$$S(\hat{\phi}_{LS}, \hat{\theta}_{LS}) = \text{Min}S(\phi, \theta)$$

$$\hat{\sigma}_{LS}^2 = (n - p - q)^{-1} S(\hat{\phi}_{LS}, \hat{\theta}_{LS})$$

2-2-2 Estimation LS (MC) conditionnels

Considérer le processus ARMA(p,q) d'Eqns $\phi(B)X_t = \theta(B)\varepsilon_t$

Suppose que le processus, en plus d'être SLC, est inversible i.e tous les zeros de $\theta(B)$ sont de module >1 . Alors

$$\varepsilon_t = f(B)X_t = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\pi)X_{t-i};$$

où

$$f(B) = \theta(B)^{-1}\phi(B) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\pi)B^i.$$

Définir les "résidus conditionnels" pour $1 \leq t \leq n$:

$$r_t(\pi) = E(\varepsilon_t / X_1, \dots, X_n) = E(f(B)X_t / X_1, \dots, X_n)$$

$$= X_t + f_1 X_{t-1} + \dots + f_{t-1} X_1 + E(f_t X_0 + \dots / X_1, \dots, X_n)$$

En supposant de plus que $X_j = 0, j \leq 0$ on a

$$r_t(\pi) = E(\varepsilon_t / X_1, \dots, X_n) = E(\varepsilon_t / \dots 0, \dots 0, X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=0}^{t-1} f_i(\pi)X_{t-i}$$

Definition 0.4. Un estimateur LS (MC) Conditionnels $\hat{\pi}_{CLS}$ de π est défini par $\hat{\pi}_{CLS} = \arg(\text{Min}_{\pi}(\sum_{t=1}^n r_t(\pi)^2))$

Equations Normales:

$$\sum_{t=2}^n r_t(\hat{\pi}_{CLS}) \partial r_t(\hat{\pi}_{CLS}) / \partial \pi_j = 0; j = 1, \dots, p + q + 1 \text{ (car } r_1(\pi) = X_1)$$

**QQ Pb d'existence et d'unicité de solutions

Référence

Extension des résultats classiques aux s.t. : Whittle

ANNEXE Compléments à l'estimation MV

Vraisemblance pour un processus MA(q)

Ref : B&J

Supposons que $X'_n = (x_1, \dots, x_n)$ soit engendré par le processus (centré)

$$X_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

Alors la vraisemblance est donnée par ()

Détermination de

Considérons le changement de variables

$$\varepsilon = LX_n + A\varepsilon_*$$

$$\text{où } \varepsilon = (\varepsilon_{1-q}, \dots, \varepsilon_n)', \varepsilon_* = (\varepsilon_{1-q}, \dots, \varepsilon_0)', L, A$$

Pour cela écrivons

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \varepsilon_t, t = 1 - q, \dots, 0 \\ \varepsilon_t = x_t - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}, t = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$\varepsilon_1 = x_1 - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{1-i},$$

$$\varepsilon_2 = x_2 - \theta_1 \varepsilon_1 - \sum_{i=2}^q \theta_i \varepsilon_{2-i} = \varepsilon_2 = x_2 - \theta_1 x_1 - \sum_{i=2}^q (\theta_i - \theta_{i-1}) \varepsilon_{2-i} + (-1)^2 - \theta_q \varepsilon_{1-q},$$

ainsi de suite

$$p(\varepsilon; \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n+q}{2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon' \varepsilon}{2\sigma^2}\right)$$

La transformamtion a pour jacobien 1, d'où la distribution conjointe de $(X'_n, \varepsilon'_*)'$ est

$$p(X_n, \varepsilon_*; \theta, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n+q}{2}} \exp\left(-\frac{S(\theta, \varepsilon_*)}{2\sigma^2}\right)$$

$$\text{où } S(\theta, \varepsilon_*) = (LX_n + A\varepsilon_*)'(LX_n + A\varepsilon_*) = |LX_n + A\varepsilon_*|_e^2$$

Considérons (le vecteur erreur dans B&J c'est plutôt la fonction vectorielle)

$$\tilde{\varepsilon}_*(X_n) = \arg \min_{\varepsilon_*(X_n)} |LX_n + A\varepsilon_*|_e^2$$

$$\text{(i.e. } A(\varepsilon_* - \tilde{\varepsilon}_*(X_n)) \perp_e LX_n + A\varepsilon_*)$$

Donc

$$S(\theta, \varepsilon_*) = S(\theta, \tilde{\varepsilon}_*(X_n)) + |A(\varepsilon_* - \tilde{\varepsilon}_*(X_n))|_e^2$$

$$\text{où } S(\theta, \tilde{\varepsilon}_*(X_n)) = |LX_n + A\tilde{\varepsilon}_*(X_n)|_e^2$$

et $|z|_e^2 = z'z$ désigne le carré de la norme euclidienne d'un vecteur z dans un espace de dim finie

Mescommment: Pas clair ici dans B&J, préférable d'use l'espérance conditionnelle

On a donc

$$p(X_n, \varepsilon_*; \theta, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n+q}{2}} \exp\left(-\frac{S(\theta, \tilde{\varepsilon}_*(X_n)) + |A(\varepsilon_* - \tilde{\varepsilon}_*(X_n))|_e^2}{2\sigma^2}\right)$$

Comme on a aussi

$$p(X_n, \varepsilon_*; \theta, \sigma^2) = p(X_n; \theta, \sigma^2) p(\varepsilon_*/X_n; \theta, \sigma^2)$$

d'où (dans B&J???? pas clair)

$$p(\varepsilon_*/X_n; \theta, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{q}{2}} (\det A'A)^{1/2} \exp\left(-\frac{(\varepsilon_* - \tilde{\varepsilon}_*(X_n))' A'A (\varepsilon_* - \tilde{\varepsilon}_*(X_n))}{2\sigma^2}\right)$$

$$p(X_n; \theta, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} (\det A'A)^{-1/2} \exp\left(-\frac{S(\theta)}{2\sigma^2}\right)$$

avec $S(\theta) = S(\theta, \tilde{\varepsilon}_*(X_n))$

Conséquence

$$\text{d'après B\&J } \tilde{\varepsilon}_*(X_n) = E(\varepsilon_*/X_n; \theta) = E_\theta(\varepsilon_*/X_n)$$

$$S(\theta, \tilde{\varepsilon}_*(X_n)) = \sum_{t=1-q}^n E_\theta^2(\varepsilon_t/X_n)$$

$$\text{et } E_\theta(\varepsilon/X_n) = LX_n + AE_\theta(\varepsilon_*/X_n)$$

et par comparaison, on a aussi

$$(\det A'A)^{-1/2} = (\det \Gamma_n^{(0,q)})^{-1/2}$$

$$S(\theta) = S(\theta, \tilde{\varepsilon}_*(X_n)) = X_n' (\Gamma_n^{(0,q)})^{-1} X_n$$

Calcul de $S(\theta)$

$$E(\varepsilon_*/X_n; \theta) = (E(\varepsilon_{1-q}/X_n; \theta), E(\varepsilon_{2-q}/X_n; \theta), \dots, E(\varepsilon_0/X_n; \theta))'$$

(B&J propose de calculer par la procédure back-forecasting pour les valeurs préliminaires puis calculer récursivement

$$E(\varepsilon_t/X_n; \theta) = E(X_t/X_n; \theta) - \sum_{i=1}^q \theta_i E(\varepsilon_{t-i}/X_n; \theta) = X_t - \sum_{i=1}^q \theta_i E(\varepsilon_{t-i}/X_n; \theta), t = 1, \dots, n$$

Exemple MA(1)

Estimateurs ML pour AR(1) SLC

Ref. Box & Jenkins,

$$\text{Eq } X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t, (\varepsilon_t) \text{ Nid}(0, \sigma^2)$$

3 façons pour déterminer la loi conjointe de $(x_1, \dots, x_n)'$

a) Loi jointe de $(x_2, \dots, x_n)'$ conditionnelle à x_1 :

$$p(x_2, \dots, x_n/x_1, \phi, \sigma) = p(x_2/x_1, \phi, \sigma) p(x_3/x_1, x_2; \phi, \sigma) \dots p(x_n/x_1, \dots, x_{n-1}, \phi, \sigma) = p(x_2/x_1, \phi, \sigma) \dots p(x_n/x_1, \phi, \sigma) = p(\varepsilon_2 + \phi x_1; \sigma) \dots p(\varepsilon_n + \phi x_{n-1}; \sigma)$$

car loi de X_t conditionnelle à x_{t-1} est $\varepsilon_t + \phi x_{t-1} \text{ N}(\phi x_{t-1}, \sigma^2)$

d'où la loi jointe de $(x_1, \dots, x_n)'$ est $p(x_1, \dots, x_n; \phi, \sigma) = p(x_1, \phi, \sigma) p(x_2/x_1, \phi, \sigma) \dots p(x_n/x_{n-1}, \phi, \sigma)$

b) Considère la transformation (linéaire) $T: \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{e}_n$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = x_1 \\ e_2 = x_2 - \phi x_1 \\ \dots \\ e_n = x_n - \phi x_{n-1} \end{array} \right\}$$

$$p(x_1, \dots, x_n; \phi, \sigma) = p(e_1, \dots, e_n; \phi, \sigma) \left| \frac{D(e_1, \dots, e_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \right|; \mathbf{e}_n = T^{-1} \mathbf{X}_n; J = T; |J| = |T|^{-1} = 1.$$

$$p(x_1, \dots, x_n; \phi, \sigma) = p(e_1, \dots, e_n; \phi, \sigma) = (2\pi)^{-n/2} (\sigma_0^2 \sigma^{2(n-1)})^{-1/2} \exp(-1/2 Q(\mathbf{e}_n))$$

$$Q(\mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_n' V_e^{-1} \mathbf{e}_n = \sigma_0^{-2} x_1^2 + \sigma^{-2} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2$$

$$\text{car } V_e^{-1} = \text{Diag}[\sigma_0^{-2} \sigma^{-2} \dots \sigma^{-2}]$$

c) D'après les hypothèses, \mathbf{X}_n est un vecteur Normal(0, Γ_n) de mat covariance $\Gamma_n = (\gamma_{ij})$.

Comme $\gamma_{ij} = \sigma_0^2 \phi^{|j-i|}$,

$$\det \Gamma_n = \sigma_0^{2n} \det \begin{bmatrix} 1 & \phi & \phi^2 & \dots & \phi^{n-1} \\ \phi & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi^{n-1} & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} = \sigma_0^{2n} \det \begin{bmatrix} 1 - \phi & \phi - 1 & \phi^2 - \phi & \dots & \phi^{n-1} - \phi^{n-2} \\ \phi & 1 & \dots & \dots & \phi^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi^{n-1} & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (1 - \phi) \sigma_0^{2n} \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\phi & \dots & -\phi^{n-2} \\ \phi & 1 & \dots & \dots & \phi^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi^{n-1} & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} = (1 - \phi) \sigma_0^{2n} \det \begin{bmatrix} 1 + \phi & 0 & \dots & 0 \\ \phi & 1 & \dots & \phi^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi^{n-1} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} =$$

$$(1 - \phi^2) \sigma_0^{2n} \det \Gamma_{n-1}$$

d'où

$$\det \Gamma_n = (1 - \phi^2)^{n-1} \sigma_0^{2n}$$

$$\text{et } p(x_1, \dots, x_n; \phi, \sigma) = (2\pi)^{-n/2} (\sigma_0^2 (1 - \phi^2)^{n-1})^{-1/2} \exp(-1/2 Q(\mathbf{e}_n))$$

Vraisemblance conditionnelle

Vraisemblance exacte

Estimation LS modèle AR(p)

D'abord cas pier AR(1)

$$X_k = \phi X_{k-1} + \varepsilon_k, k \in \mathbb{Z} \quad (0.1)$$

où ϕ est un paramètre réel tel que $|\phi| < 1$.

On rappelle qu'à partir de la donnée de n v.a. X_1, \dots, X_n issues de X , l'estimateur des moindres carrés $\hat{\phi}$ de ϕ vérifie la relation

$$\hat{\phi} - \phi = \frac{\sum_{k=2}^n \xi_k}{\sum_{k=2}^n X_{k-1}^2} \quad (0.2)$$

où $\xi_k = X_{k-1} \varepsilon_k, k \in \mathbb{Z}$.

Posons $S_1 = 0, S_n = \sum_{k=2}^n \xi_k, n \geq 2, s_n^2 = \text{Var}(S_n), n \geq 1$ et $\tilde{C}_X(0) = n^{-1} \sum_{k=2}^n X_{k-1}^2$. Ainsi $\hat{\phi} - \phi = \frac{n^{-1} S_n}{\tilde{C}_X(0)}$. Les propriétés de $\hat{\phi} - \phi$ se déduit donc en l'étude du numérateur $n^{-1} S_n$ et du dénominateur $\tilde{C}_X(0)$.

L'étude de S_n

On a: $(S_n, \mathfrak{S}_n, n \geq 1)$ est une MG et ses propriétés en découlent.

On choisit $\mathfrak{S}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}(\varepsilon_k, k \leq n)$, $n \geq 1$. D'abord, X_k, ε_{k+1} étant de carré intégrable donc $\xi_{k+1} = X_k \varepsilon_{k+1} \in L^1(P)$, puis $E_k(X_k \varepsilon_{k+1}) \stackrel{p.s.}{=} X_k E(\varepsilon_{k+1}) = 0$, en notant $E_k = E^{\mathfrak{S}_k}$.

Sous hypothèse

(H1) $(\varepsilon_k, \mathfrak{S}_k)$ une dMG() i.e une dMG tq $E_k(\varepsilon_{k+1}^2) \stackrel{p.s.}{=} \sigma^2$,

on a $E(X_k^2 \varepsilon_{k+1}^2) = E(X_k^2 E_k(\varepsilon_{k+1}^2)) = \sigma^2 C_X(0)$.

(Cas iid: indépendance de X_k et de ε_{k+1} , et $E(X_k^2 \varepsilon_{k+1}^2) = E(X_k^2)E(\varepsilon_{k+1}^2)$).

Par ailleurs, d'après (0.1), on a

$X_k^2 = \phi^2 X_{k-1}^2 + 2\phi X_{k-1} \varepsilon_k + \varepsilon_k^2$ donc

$$E(X_k^2) = \phi^2 E(X_{k-1}^2) + 2\phi E(X_{k-1} \varepsilon_k) + E(\varepsilon_k^2) : (1 - \phi^2) C_X(0) = \sigma^2 : C_X(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}.$$

Ainsi $E(\xi_{k+1}^2) = \frac{\sigma^4}{1 - \phi^2}$, d'où

Propriétés

(0) $C_X(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$

(1) $s_n^2 = Var(S_n) = \sum_{k=2}^n E(\xi_{k+1}^2) = n\sigma^2 C_X(0) = n \frac{\sigma^4}{1 - \phi^2}$.

(2) $n^{-1} S_n \xrightarrow{p.s.} 0$ (LFGN des MG car $\sum_{k=2}^{\infty} E\{(k^{-1} \xi_{k+1})^2\} = \frac{\sigma^4}{1 - \phi^2} \sum_{k=2}^{\infty} k^{-2} < \infty$).

L'étude de $\tilde{C}_X(0)$

Contrairement à , je pars ici de la relation (0.1): $X_k^2 = \phi^2 X_{k-1}^2 + 2\phi X_{k-1} \varepsilon_k + \varepsilon_k^2$, $\sum_{k=2}^n X_k^2 = \sum_{k=2}^n X_{k-1}^2 + (X_n^2 - X_1^2)$

$$(1 - \phi^2) \sum_{k=2}^n X_{k-1}^2 = (X_1^2 - X_n^2) + 2\phi \sum_{k=2}^n X_{k-1} \varepsilon_k + \sum_{k=2}^n \varepsilon_k^2 \quad (0.3)$$

Observons que $n^{-1} S_n = n^{-1} \sum_{k=2}^n X_{k-1} \varepsilon_k \xrightarrow{p.s.} 0$ et que $n^{-1} X_1^2 \xrightarrow{p.s.} 0$ car pour presque tout $\omega \in \Omega$, $n^{-1} X_1^2(\omega) \rightarrow 0$

Il reste alors à montrer que

Lemma 0.5. Sous les hypothèses

(H2) $\max_{1 \leq r} E |\varepsilon_r|^m < \infty; m > 2$

(i) $n^{-1} X_n^2 \xrightarrow{p.s.} 0$

(ii) si $m=4$ (non encore résolu pour $2 < m < 4!!$) $n^{-1} \sum_{k=2}^n \varepsilon_k^2 \xrightarrow{p.s.} \sigma^2$

Preuve

(i) On a

$$X_k = \phi^k X_0 + Y_k;$$

$$Y_k = \phi^{k-1} \varepsilon_1 + \dots + \phi^0 \varepsilon_k = \sum_{l=1}^k \phi^{k-l} \varepsilon_l = \phi^{k-1} \sum_{r=1}^k \phi^{-(r-1)} \varepsilon_r = \phi^k \sum_{r=1}^k \phi^{-r} \varepsilon_r$$

D'après lemme ci-dessous: pour tout $c > 0$ et de l'inégalité

$$P\left[\frac{|Y_k|}{\sqrt{k}} > c\right] = P\left[\left(\frac{|Y_k|}{\sqrt{k}}\right)^m > c^m\right] \leq c^{-m} k^{-m/2} E(|Y_k|^m)$$

on a $\sum_{k=1}^{\infty} P\left[\frac{|Y_k|}{\sqrt{k}} > c\right] < \infty \Rightarrow \frac{Y_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{p.s.} 0$

Comme par ailleurs $\frac{X_0}{\sqrt{n}} \xrightarrow{p.s.} 0$, donc (i) prouvé.

Rappel critères de cvps

CNS $X_n \xrightarrow{p.s.} X \Leftrightarrow \forall c > 0, \lim_n P(S_{n,c}) = 1 \Leftrightarrow \forall c > 0, \lim_n P(S_{n,c}^c) = 0$

où $S_{n,c} = \cap_{k=n}^{\infty} [|X_k - X| \leq c]$, $S_{n,c}^c = \cup_{k=n}^{\infty} [|X_k - X| > c] = \text{Max}_{k \geq n} [|X_k - X| > c]$.

CS: $\forall c > 0, \sum_{k=1}^{\infty} P(|X_k - X| > c) < \infty \Rightarrow X_n \xrightarrow{p.s.} X$

Thm Cv SMG

Si Z_n est une SMG tq $\sup_n E(|Z_n|^m) < \infty$ pour alors Z_n cv dans L^m et ps.

(ii) La même démarche ne marche pas pour la somme $n^{-1} \sum_{k=2}^n \varepsilon_k^2 \xrightarrow{p.s.} 0$.

car majorer via Jensen $(n^{-1} \sum_{k=2}^n \varepsilon_k^2)^m \leq n^{-1} \sum_{k=2}^n (\varepsilon_k^2)^m : (\sum_{k=2}^n \varepsilon_k^2)^m \leq n^{m-1} \sum_{k=2}^n (\varepsilon_k^2)^m$

$$P[\sum_{k=2}^n \varepsilon_k^2 > cn] = P[(\sum_{k=2}^n \varepsilon_k^2)^m > c^m n^m] \leq c^{-m} n^{-m} E((\sum_{k=2}^n \varepsilon_k^2)^m)$$

PB non encore résolu!!!

Observons que $(\varepsilon_k^2 - \sigma^2)$ est une dMG.

Problème de convergence p.s. des sommes $Y_k = \phi^k Z_k; Z_k = \sum_{r=0}^{k-1} \phi^{-r} \varepsilon_r$

Comme les Z_k sont des MG, on peut soit utiliser Thm Cv MG avec condition sur $\sup_k E|Z_k|^m, m > 2$ ou preuve directe par les critères de cv ps mais les deux cas utilisent inégalité de Jensen pour majorer $|Z_k|^m$.

Rappel inégalité de Jensen

Soit P une mesure de probabilité sur (Ω, \mathfrak{F}) , $X \in L^1(P)$ et Φ une convexe convexe sur R (dans Rudin on suppose que $a < X(\omega) < b$ et Φ convexe sur (a,b)) alors $\Phi(E_P(X)) \leq E_P(\Phi(X))$.

Application ici: pour $m > 0$, la fct $u: x \in (0, \infty) \rightarrow x^m$ est convexe et

$$P = (p_r), p_r = \frac{|\phi_r|^{-r}}{T_k}, r = 1, \dots, k, T_k = \sum_{r=1}^k |\phi|^{-r} = |\phi|^{-1} \frac{|\phi|^{-k} - 1}{|\phi|^{-1} - 1}.$$

$$\text{Jensen: } \left(\sum_{r=1}^k |\phi|^{-r} \varepsilon_r \right)^m \leq (T_k)^m \sum_{r=1}^k p_r |\varepsilon_r|^m$$

$$\text{d'où } E(|Y_k|^m) = (|\phi|^k)^m E(|Z_k|^m) \leq (|\phi|^k T_k)^m \max_{1 \leq r} E|\varepsilon_r|^m$$

$$\text{mais } |\phi|^k T_k = \frac{|\phi|^{-1}}{|\phi|^{-1} - 1} (1 - |\phi|^k) \leq 2 \frac{|\phi|^{-1}}{|\phi|^{-1} - 1}$$

Lemma 0.6. *On a pour tout $m > 0$*

- (i) $E\left(\sum_{r=1}^k |\phi|^{-r} \varepsilon_r\right)^m \leq (T_k)^m \sum_{r=1}^k p_r E|\varepsilon_r|^m \leq (T_k)^m \max_{1 \leq r} E|\varepsilon_r|^m$
- (ii) $E(|Y_k|^m) \leq 2 \frac{|\phi|^{-1}}{|\phi|^{-1} - 1} \max_{1 \leq r} E|\varepsilon_r|^m$

Observons

Remark 1. *Si les sont iid, alors $E|\varepsilon_r|^m = E|\varepsilon_1|^m$*

2) On suppose à partir de maintenant que $E(\varepsilon_1^4) < \infty$.

i) Montrer que la suite $(n^{-1} \sum_{k=2}^n \varepsilon_k^2, n \geq 1)$ converge p.s. vers σ^2 quand $n \rightarrow \infty$.

ii) Montrer que $E(X_k^4) < \infty, \forall k \in \mathbb{Z}$. (Indication: En utilisant l'équation (0.1) et en observant que $E(X_k^4) = E(X_1^4)$, on montrera que $(1 - \phi^4)E(X_1^4) = 6\phi^2 \sigma^2 E(X_1^2) + E(\varepsilon_1^4)$). En déduire que puis que la suite $(n^{-1} \sum_{k=2}^n \varepsilon_k^2, n \geq 1)$ converge p.s. vers σ^2 quand $n \rightarrow \infty$.

iii) Montrer que $(1 - \phi^2) \sum_{k=2}^n X_k^2 = \phi^2 (X_1^2 - X_n^2) + 2\phi \sum_{k=2}^n \xi_k + \sum_{k=2}^n \varepsilon_k^2$. En déduire que la suite $(n^{-1} X_n^2, n \geq 1)$ converge p.s. vers $\frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$ quand $n \rightarrow \infty$.

3) On notera E_k pour l'espérance conditionnelle relative à $\mathfrak{F}_k, k \geq 1$ et $I(A)$ désigne la fonction indicatrice d'un sous-ensemble A .

i) Montrer que pour $k \geq 2, E_{k-1}(\xi_k^2) = \sigma^2 X_{k-1}^2$ et en déduire que la suite $(n^{-1} \sum_{k=2}^n E_{k-1}(\xi_k^2), n \geq 1)$ converge p.s. vers $\frac{\sigma^4}{1 - \phi^2}$ quand $n \rightarrow \infty$.

ii) Soient c et d deux réels arbitraires positifs. Montrer que pour $k \geq 2, E_{k-1}(\xi_k^2 I(|\xi_k| > cs_n)) \leq \frac{\sigma^4 X_{k-1}^4}{c^2 s_n^2}$ puis que

$P[\{s_n^{-2} \sum_{k=2}^n E_{k-1}(\xi_k^2 I(|\xi_k| > cs_n))\} < d] \leq \frac{\sigma^4 E(X_1^4)}{dc^2 s_n^2}$. En déduire que la suite $(s_n^{-2} \sum_{k=2}^n E_{k-1}(\xi_k^2 I(|\xi_k| > cs_n)), n \geq 1)$ converge en probabilité vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, puis que $(s_n^{-1} S_n, n \geq 1)$ est asymptotiquement normal $N(0, V)$ dont on précisera la variance V .

iii) En déduire la loi asymptotique de $n^{1/2}(\hat{\phi} - \phi)$ quand $n \rightarrow \infty$, où $\hat{\phi}$ est défini par la relation (0.2).

Corrigé Examen MIM2 1ère session (Janvier 1998)

1) On choisit $\mathfrak{S}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}(\varepsilon_k, k \leq n), n \geq 1$. D'abord, X_k, ε_{k+1} étant de carré intégrable donc $\xi_{k+1} = X_k \varepsilon_{k+1} \in L^1(P)$, puis $E_k(X_k \varepsilon_{k+1}) \stackrel{p.s.}{=} X_k E(\varepsilon_{k+1}) = 0$, en notant $E_k = E^{\mathfrak{S}_k}$.

De l'indépendance de X_k et de ε_{k+1} , on a $E(X_k^2 \varepsilon_{k+1}^2) = E(X_k^2)E(\varepsilon_{k+1}^2)$.

Par ailleurs, d'après (0.1), on a

$$X_k^2 = \phi^2 X_{k-1}^2 + 2\phi X_{k-1} \varepsilon_k + \varepsilon_k^2 \text{ donc}$$

$$E(X_k^2) = \phi^2 E(X_{k-1}^2) + 2\phi E(X_{k-1} \varepsilon_k) + E(\varepsilon_k^2) : (1 - \phi^2)C_X(0) = \sigma^2 : C_X(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}.$$

$$\text{Ainsi } E(\xi_{k+1}^2) = \frac{\sigma^4}{1 - \phi^2}$$

$$\text{D'où } s_n^2 = \text{Var}(S_n) = \sum_{k=2}^n E(\xi_{k+1}^2) = n\sigma^2 C_X(0) = n \frac{\sigma^4}{1 - \phi^2}.$$

Comme $\sum_{k=2}^{\infty} E\{(k^{-1} \xi_{k+1})^2\} = \frac{\sigma^4}{1 - \phi^2} \sum_{k=2}^{\infty} k^{-2} < \infty$, il s'ensuit de la LFGN des MG que $n^{-1} S_n \rightarrow^{p.s.} 0$.

2) i) Il est immédiat que $(\varepsilon_k^2 - \sigma^2, k \geq 1,)$ est une dMG et d'après l'hypothèse $\sum_{k=2}^{\infty} E\{(k^{-1}(\varepsilon_k^2 - \sigma^2))^2\} = E\{(\varepsilon_1^2 - \sigma^2)\}^2 \sum_{k=2}^{\infty} k^{-2} < \infty$, donc d'après la LFGN, $n^{-1} \sum_{k=2}^n \varepsilon_k^2 \rightarrow^{p.s.} \sigma^2$.

ii) On a $X_k^4 = (\phi X_{k-1} + \varepsilon_k)^4 = (\phi X_{k-1})^4 + 4(\phi X_{k-1})^3 \varepsilon_k + 6(\phi X_{k-1})^2 \varepsilon_k^2 + 4(\phi X_{k-1}) \varepsilon_k^3 + \varepsilon_k^4$,

$E(X_k^4) = E(X_1^4) = \phi^4 E X_1^4 + 6\phi^2 \sigma^2 E(X_{k-1}^2) + E\varepsilon_1^4$ car X est processus strictement stationnaire, les ε_k étant iid, et

$$E(\phi X_{k-1})^3 \varepsilon_k = E((\phi X_{k-1})^3)E(\varepsilon_k) = 0, E((\phi X_{k-1}) \varepsilon_k^3) = \phi E(X_{k-1})E(\varepsilon_k^3) = 0.$$

Soit $c > 0$, on a $P[k^{-1} X_k^2 > c] \leq c^2 k^{-2} E(X_k^4); \sum_{k=1}^{\infty} P[k^{-1} X_k^2 > c] < \infty$, c'est donc une CS pour que $n^{-1} X_n \rightarrow^{p.s.} 0$.

iii) La relation demandée résulte immédiatement de l'équation (0.1).

X_1 étant une v.a. réel (finie) P-p.s., il est immédiat que pour (preque) tout ω fixé de Ω , $n^{-1} X_1(\omega) \rightarrow 0$ (convergence simple) quand $n \rightarrow \infty$. De cette limite et des résultats §§-§§, on obtient $(1 - \phi^2) \sum_{k=2}^n X_k^2 \xrightarrow{p.s.} \sigma^2$, d'où le résultat demandé.

3) Posons $\xi_{n,k} = s_n^{-1} \xi_k$ (se rappeler que $s_n^2 = n\sigma^2 C_X(0) = n \frac{\sigma^4}{1 - \phi^2}$)

i) De façon évidente, pour $k \geq 2$, $E_{k-1}(\xi_k^2) \stackrel{p.s.}{=} X_{k-1}^2 E_{k-1}(\varepsilon_k^2) = \sigma^2 X_{k-1}^2$ et le résultat se déduit de 2) iii). Autrement dit,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n E_{k-1}(\xi_{n,k}^2) &= s_n^{-2} \sum_{k=2}^n E_{k-1}(\xi_k^2) \\ &= \left(\frac{\sigma^4}{1 - \phi^2}\right)^{-1} \sigma^2 n^{-1} \sum_{k=2}^n X_{k-1}^2 \rightarrow \left(\frac{\sigma^4}{1 - \phi^2}\right)^{-1} \left(\frac{\sigma^4}{1 - \phi^2}\right) = 1 \end{aligned}$$

ii) Il est évident que $E_{k-1}(\xi_k^2 I(|\xi_k| > cs_n)) \leq \frac{\sigma^4 X_{k-1}^4}{c^2 s_n^2} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
& P[d < \{s_n^{-2} \sum_{k=2}^n E_{k-1}(\xi_k^2 I(|\xi_k| > cs_n))\}] \\
& \leq P[d < c^{-2} s_n^{-4} \sigma^4 \sum_{k=2}^n X_{k-1}^4] \\
& \leq d^{-1} c^{-2} s_n^{-4} \sigma^4 E(\sum_{k=2}^n X_{k-1}^4) = (d^{-1} c^{-2} \sigma^4) n s_n^{-4} E(X_1^4) \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

D'après le TCL de Lindeberg, $(s_n^{-1} S_n = \sum_{k=2}^n \xi_{n,k}, n \geq 1)$ est asymptotiquement normal $N(0, 1)$.

$$\text{Par ailleurs, } s_n^{-1} = n^{-1/2} \left(\frac{\sigma^2}{\sqrt{1-\phi^2}} \right)^{-1} = n^{-1/2} (\sigma \sqrt{C_X(0)})^{-1}, C_X(0) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$

$$\begin{aligned}
n^{1/2}(\hat{\phi} - \phi) &= \frac{n^{-1/2} \sum_{k=2}^n \xi_k}{n^{-1} \sum_{k=2}^n X_{k-1}^2} = \sigma \sqrt{C_X(0)} \frac{s_n^{-1} S_n}{n^{-1} \sum_{k=2}^n X_{k-1}^2} \\
&= \sigma (\sqrt{C_X(0)} \frac{1}{C_X(0)}) \frac{s_n^{-1} S_n}{\frac{1}{C_X(0)} n^{-1} \sum_{k=2}^n X_{k-1}^2} \text{ est aN}(0, V_\phi), \text{ où } V_\phi = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{C_X(0)}} \right)^2 = 1 - \phi^2, \\
&\text{car } \left(\frac{1-\phi^2}{\sigma^4} \right) n^{-1} \sum_{k=2}^n X_{k-1}^2 \xrightarrow{p.s.} 1.
\end{aligned}$$

Validation
Choix de modèles

0.1. 2-3 Analyse fréquentielle de Fourier

On représente la s.t. sous forme d'un vecteur $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)'$ de R^n plongé dans \mathbb{C}^n , où y' denote le transposé d'un vecteur y .

Préliminaires

Soit $\{e_j, j \in F_n\}$ une base orthonormale de \mathbb{C}^n , muni de la norme associée $\|\cdot\|_{Eu}$ au produit scalaire euclidien usuel $\langle x, y \rangle = \sum_{t=1}^n x_t y_t^*$ où F_n est un intervalle de ayant n points et z^* le complexe conjugué de z . Alors on a

(i) en projetant x sur la base orthonormale

$$\mathbf{x} = \sum_{j \in F_n} \langle x, e_j \rangle e_j$$

($\langle x, e_j \rangle$ sont les projections)

(ii) l'identité de Bessel-Parseval

$$\|x\|_{Eu}^2 = \sum_{t=1}^n x_t^2 = \sum_{j \in F_n} |\langle x, e_j \rangle|^2$$

En choisissant pour $e_j = (e^{i1\omega_j}, e^{i2\omega_j}, \dots, e^{in\omega_j})'$ (appelée la base de Fourier), on a :

Définition

Pour $F_n = \{j : -[\frac{n-1}{2}] \leq j \leq [\frac{n}{2}]\}$,

(i) $j \in F_n \rightarrow \langle x, e_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n x_t e^{-it\omega_j}$ est appelée la transformée de Fourier discrète de la s.t ou du vecteur x où les $\omega_j = 2\pi \frac{j}{n}$ (resp. $\frac{j}{n}$) sont appelé les pulsations (resp. fréquences) de Fourier quand $j \geq 0$.

(ii) La fonction $\omega_j \rightarrow I(\omega_j) = |\langle x, e_j \rangle|^2$ est appelée le périodogramme de x .

REM :

Une procédure de calcul rapide de TFD est appelée TFR ou FFT

Interpétation et utilisation

* Comme représente à une constante près, la variance de la s.t ou la puissance signal x interprété comme les valeurs d'une intensité de courant, l'identité de Bessel-Parseval donne la décomposition de cette variance ou puissance sur les sinusôides, étant la contribution en variance ou en puissance ...

Le périodogramme fournit un outil de détection de période

0.2. 2-4 Probleme de l'interprétation

Le problème majeur est comment interpréter les statistiques précédentes (corrélogrammes et périodogramme) quand la s.t. ou le signal est bruité(e) ou plus généralement quand x est une partie d'une réalisation (ou trajectoire) d'un processus constitué des $x_t, t \in T$ où T est un ensemble contenant $\langle 1, n \rangle$

Références

- (Ref Modèles linéaires et justification de leur représentation des ts : Hannan (1970) Multiple Time Series p. 9-18)
- Hannan E.J. (1969) Time series
- Hannan E. J. (1970) Multiple time series. p.9-18
- Brockwell Davis Time series analysis Theory and Practice
- Priestley Spectrl analysis and time series Academic Press
- G M Jenkins & D. G. Watts Spectral analyssis and its applications Holden day
- T W Anderson The statistical analysis of time series Wiley
- T W Anderson An introduction to multivariate statistical analysis Wiley
- Compléments
- E. Parzen Stochastic processes HoldenDay
- H Cramér & M. S. Leadbetter Stationry and related stationary processes Wiley
- Cox D. R. & Miller H. O. 1965 The thory of stiochastic processes London Methuen
- J. L. Doob Stochastic processes Wiley
- Sur la prediction
- Whittle P 1963 Predcition and regulation by linear least squares methods Van Nostrand Princeton
- MAsani P & Wiener N. 1959 Non linea pedictor Probability and statistics Edited zby U Grenander J. Wiley and son New York
- Wiener N 1956 Nonlinear prediction and dynamics Proc Third Berkeley Sympo 3 pp247 - 252
- Articles
- Dzhaparidze K.O & Yaglom A.M. 1973 Asymptotically efficeinet estimation of the spectrum parametezrs of stationary stochatic processses Proc of the Prague symposium on asymptotic statistics
- Pham dinh 1984 An note on some statistics usdeful in identifying the ARMA orders J. Time Series Analysis pp 273 -249
- Sur la prédiction
- * Parzen E 1961 An approach to time series analyssi Ann Math Stat n°32 pp 951 - 989
- Wahaba G 1966 Cross-spectral distribution thezory for mixed specztra and estimation of predictor filtzer czoefficient
- Davis H T & Jones R. H. 1968 Estimation of the innovation varaince zzozf stationary time series JASA 63 pp 141 -149

Granger C.W. J. 1969 Prediction with a generalized cost of error function Oper Res Q 20 pp 199 -207

Brown R.G. 1963 Smoothing forecasting and prediction of discrete time series

Zadeh L.A. 1 Ragazzini J.R. 1950 An extension of Wiener's theory of prediction J of Applied physics 21 pp 645 - 655

Bloomfield 1972 On error of prediction of time series

Royell LLS prediction Approach to 2-stage sampling

Ray & Wyld Polynom properties of multiterm predictors /controllers nonstationary

Miami 1975 Algo generating fct & prediction

Nadkarni Prediction th

Ali 1977 Analyssi of ARMA estimation-prediction

Kimenfield Exponential forecastings of nonstationary time series

Newbold Forecasting transform series

Nelson Formulation of nonlinear predictor

Akutowicz On an explicit formula in LS predictor

Bates & Granger Combination of forecasts