PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN BIẾN NGẪU NHIÊN

Định nghĩa. Cho $\{W(t)\}$ là một tiến trình Wiener trong một không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, X_0 là hàm thực trên Ω, f và g là hàm thực trên $[0,T] \times \Omega$ và $\{X(t)\}$ là tiến trình ngẫu nhiên sao cho $\forall\, r \in (0,T\,]$

$$X(t,\omega) = X_0 + \int_0^t f(s, X(s,\omega))dt + \int_0^t g(s, X(s,\omega))dW,$$

hay $dX(t,\omega) \;=\; f(t, X(t,\omega))dt + g(t, X(t,\omega))dW$. Ta nói

X là nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$(S)\;\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t)) + g(t, X(t))\dfrac{dW(t)}{dt} & \forall t \in (0,T], \\ X(0) = X_0 & . \end{cases}$$

Chúng ta cần nêu rõ các điều kiện sao cho các tích phân Itô trong định nghĩa trên xác định.

Định nghĩa. Cho một số thực T dương, ta ký hiệu S_T là tập hợp các hàm số liên tục h trên $[0,T] \times \mathbb{R}$ có các tính chất sau : có một hằng số C phụ thuộc vào h và T sao cho

(C1) $|h(t, x)| \leq C(1 + |x|) \quad \forall\, t \in [0,T], x \in \mathbb{R},$

(C2) $|h(t, x) - h(s, y)|^2 \leq C(|t - s| + |x - y|^2)$

$$\forall\, t, s \in [0,T],\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 3.1. Cho họ $\{\mathcal{F}(t)\}$ nonanticipating đối với một tiến trình Wiener $\{W(t)\}$ trong một không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Cho $h \in S_T$, $X \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T},\{\mathcal{F}(t)\})$ và $U \in \mathbb{H}^2(0,\mathrm{T},\{\mathcal{F}(t)\})$. Đặt $Y(t)(\omega) = h(t, X(t)(\omega))$ và $V(t)(\omega) = h(t, U(t)(\omega))$ với mọi $(t, \omega) \in [0,T]\times\Omega$. Chứng minh $Y \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T},\{\mathcal{F}(t)\})$ và $V \in \mathbb{H}^2(0,\mathrm{T},\{\mathcal{F}(t)\})$.

H.D. Dùng tính liên tục của h chứng minh $Y(t)$ và $V(t)$ đo được trên $(\Omega, \mathcal{F}_{X(t)})$, nên đo được trên $(\Omega, \mathcal{F}(t))$. Dùng $X \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T},\{\mathcal{F}(t)\})$ và $U \in \mathbb{H}^2(0,\mathrm{T},\{\mathcal{F}(t)\})$ và (C1), chứng minh $Y \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T},\{\mathcal{F}(t)\})$ và $V \in \mathbb{H}^2(0,\mathrm{T},\{\mathcal{F}(t)\})$.

Bài toán 3.2. Cho một họ $\{\mathcal{F}(t)\}$ nonanticipating đối với một tiến trình Wiener $\{W(t)\}$ trong một không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Cho f và $g \in S_T$, X_0 là một hàm thực đo được trên $(\Omega, \mathcal{F}(0))$ và $X_0 \in L^2(\Omega)$. Đặt

$$Y(t,\omega) = X_0(w) + \int_0^t f(s, X(s,\omega))dt + \int_0^t g(s, X(s,\omega))dW$$

$$\forall\ X \in \mathbb{H}^2(0,T,\{\mathcal{F}(t)\}), \forall\ (t,\omega) \in [0,t] \times \Omega.$$

Chứng minh $Y \in \mathbb{H}^2(0,\mathrm{T},\{\mathcal{F}(t)\})$.

H.D. Dùng (C1) và các bài tập 3.1 và 2.3

Đặt $H = \mathbb{H}^2(0,\mathrm{T},\{\mathcal{F}(t)\})$ và $A(X) = Y$ với mọi $X \in H$. Ta thấy A là một ánh xạ từ H vào H và có tính chất sau

Bài toán 3.3. Đặt $L = 2TC + 2C$, ta có

$$(i) \quad \int_\Omega |A(X)(t,\omega) - A(Y)(t,\omega)|^2 dP \leq$$

$$\leq L\int_0^t \int_\Omega |X(s,\omega) - Y(s,\omega)|^2 dPds \quad \forall X,Y \in H.$$

$$(ii) \quad \|A^n(X) - A^n(Y)\| \leq \frac{L^{n-1}T^n}{n!} \|X - Y\| \quad \forall X,Y \in H,$$

ở đây $A^{k+1}(X) = A(A^k(X))$, với mọi $X \in H$.

H.D. Ta có

$$A(X)(t) - A(Y)(t) = \int_0^t [f(s,X(s)) - f(s,Y(s))]ds$$

$$+ \int_0^t [g(s,X(s)) - g(s,Y(s))]dW,$$

Dùng bất đẳng thức Schwartz và bài tập 2.2 ta có

$$\int_{\Omega} |A(X)(t,\omega) - A(Y)(t,\omega)|^2 dP \leq$$

$$\leq 2t\int_0^t \int_{\Omega} | f(s, X(s)) - f(s, Y(s))|^2 \, dPds$$

$$+ \int_0^t \int_{\Omega} | g(s, X(s)) - g(s, Y(s))|^2 \, dPdW$$

$$\leq 2Ct\int_0^t \int_{\Omega} | X(s) - Y(s)|^2 \, dPds$$

$$+ 2C\int_0^t \int_{\Omega} | X(s) - Y(s)|^2 \, dPds$$

$$\leq L\int_0^t \int_{\Omega} | X(t,\omega) - Y(t,\omega)|^2 dPds \; .$$

Đặt $\quad a_n = \int_\Omega | A^n(X)(t,\omega) - A^n(Y)(t,\omega) |^2 dP \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$

Theo bài toán trên, ta có

$$a_n(t) \le L\int_0^t a_{n-1}(s_1)ds_1 \le L^2 \int_0^t \int_0^{s_1} a_{n-1}(s_2)ds_2 ds_1$$

$$\le \cdots \le L^n \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} a_0(s_n)ds_n \cdots ds_2 ds_1$$

$$\le \frac{L^n t^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^T a_0(s_n)ds_n = \frac{L^n t^{n-1}}{(n-1)!} \| X - Y \|^2 .$$

Từ đó suy ra (ii) .

Bài toán 3.4. Có duy nhất một $X \in H$ sao cho $A(X) = X$

H.D. Để ý A^n là ánh xạ co khi n khá lớn.

Từ đây ta có kết quả sau

Định lý . Cho một họ $\{\mathcal{F}(t)\}$ nonanticipating đối với một tiến trình Wiener $\{W(t)\}$ trong không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Cho f và $g \in S_T$, X_0 là một hàm thực đo được trên $(\Omega, \mathcal{F}(0))$ và $X_0 \in L^2(\Omega)$. Lúc đó có một nghiệm duy nhất trong $\mathbb{H}^2(0,T,\{\mathcal{F}(t)\})$ của phương trình

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t)) + g(t, X(t))\dfrac{dW(t)}{dt} \quad \forall t \in (0,T], \\ X(0) = X_0 \quad . \end{cases}$$

Bài toán 3.5. Giải phương trình viphân ngẫu nhiên

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt}(t) = 1 + 2W(t)\dfrac{dW}{dt}(t) \quad \forall t \in (0,T], \\ X(0) = 0 \quad . \end{cases}$$

H.D. Theo bài toán 2.4. ta có

$$W^2(t) = T + 2\int_0^T WdW = \int_0^T 1dt + 2\int_0^T WdW$$

Vậy $X(t) = W^2(t)$ là nghiệm của phương trình vi phân biến ngẫu nhiên (S)

Bài toán 3.5. Giải phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$(S) \quad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt}(t) = W(t) + t\dfrac{dW}{dt}(t) \quad \forall t \in (0,T], \\ X(0) = 0 \quad . \end{cases}$$

H.D. Đặt $X = tW$. Theo bài toán 2.5

$$rW(r,\omega) = \int_0^r W(t,\omega)dt + \int_0^r tdW.$$

Bài toán 3.6. Cho f là một hàm số thực khả vi trên $\mathbb{R}$. Giải phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt}(t) = f(t) & \forall t \in (0,T], \\ X(0) = 0 & . \end{cases}$$

H.D. Theo bài toán 2.6

$$X(r) = X(s) + \int_s^r f\,'dt \qquad \forall\ 0 \le s < r \le T$$

Bài toán 3.7. Cho f là một hàm thực khả vi trên $\mathbb{R}$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ là một tiến trình ngẫu nhiên trong không gian xác suất với tiến trình Wiener $\{W(t)\}$, sao cho $X(t,\omega) = f(t)F(\omega)$ với mọi $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$, và F là một biến ngẫu nhiên khả tích và độc lập với $\mathcal{V}^{+}(0)$. Giải phương trình ngẫu nhiên

$$(S) \quad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt}(t) = f'(t)F & \forall t \in (0,T], \\ X(0) = 0 & . \end{cases}$$

H.D. $X(t,\omega) = f(t)F(\omega)$ với mọi $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$. Để ý theo bài toán 2.7

$$X(r) = X(s) + \int_s^r f' F dt \qquad \forall \;\; 0 \le s < r \le T$$

Bài toán 3.8. Cho (Ω, $\mathcal{A}$, P) là một không gian xác suất với tiến trình Wiener $\{W(t)\}$. Giải phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt}(t) = G\dfrac{dW}{dt} & \forall t \in (0,T], \\ X(0) = 0 & . \end{cases}$$

H.D. Đặt $X(t,\omega) = G(\omega)\mathrm{W}(t,\ \omega)$ với mọi $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$.

Để ý theo bài toán 2.8

$$\int_r^s GdW = GW(s) - GW(r) \qquad \forall\ 0 \le r < t.$$

Bài toán 3.9. Cho $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ là một không gian xác suất với một tiến trình Wiener $\{W(t)\}$, F trong $L^1(\Omega)$ và G trong $L^2(\Omega)$ và độc lập với $\mathcal{V}^+(0)$. Giải phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt}(t) = F + G\dfrac{dW}{dt} & \forall t \in (0,T], \\ X(0) = 0 & . \end{cases}$$

H.D. Đặt

$X(t,\omega) = tF(\omega) + G(\omega)W(t, \omega) \ \ \forall\ t \in [0,T],\ \omega \in \Omega.$

Dùng các bài tập trên chứng minh X có vi phân ngẫu nhiên $dX = Fdt + GdW$.

Định lý . Cho một họ $\{\mathfrak{F}(t)\}$ nonanticipating đối với một tiến trình Wiener $\{W(t)\}$ trong một không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Cho f và $g \in S_T$, X_0 là một hàm thực đo được trên $(\Omega, \mathfrak{F}(0))$ và $X_0 \in L^2(\Omega)$. Lúc đó có một nghiệm duy nhất trong $\mathbb{H}^2(0,T,\{\mathfrak{F}(t)\})$ của phương trình

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t)) + g(t, X(t))\dfrac{dW(t)}{dt} \quad \forall t \in (0,T], \\ X(0) = X_0 \quad . \end{cases}$$

(C1) $|\,h(t\,,\,x)| \le C(1+|x|) \quad \forall\, t \in [0,T], x \in \mathbb{R},$

(C2) $|\,h\,(t\,,\,x) - h(s\,,\,y)\,|^2 \le C(|\,t-s| + |x - y|^2)$

$\forall\, t\,,\,s \in [0,T],\ x\,,\,y \in \mathbb{R}.$

Bài toán 3.10. Cho $\{X(t)\}$ là nghiệm trong định lý trên. Chứng minh có một hằng số C_1 sao cho

$$\int_\Omega |X(t)-X(r)|^2 \, dP \le C_1 |t-r| \qquad r,t\in[0,T].$$

H.D. Dùng (C1) và bài toán 2.3 chứng minh

$$\int_\Omega |X(t)-X(r)|^2 \, dP = \int_\Omega \left| \int_r^t f(s,X(s))ds + \int_r^t g(s,X(s))dW(s) \right|^2 dP$$

$$\le 2\int_\Omega \left| \int_r^t f(s,X(s))ds \right|^2 dP + 2\int_\Omega \left| \int_r^t g(s,X(s))dW(s) \right|^2 dP$$

$$\le 2|t-r| \int_\Omega \int_r^t |f(s,X(s))|^2 \, dsdP + 2\int_\Omega \left| \int_r^t g(s,X(s))dW(s) \right|^2 dP$$

$$\le 2|t-r| C\int_\Omega \int_r^t (1+|X(s)|^2)dsdP + 2\int_\Omega \left| \int_r^t g(s,X(s))ds \right|^2 dP$$

$$\le 2|t-r| [C\int_\Omega \int_r^t (1+|X(s)|^2)dsdP + \int_\Omega \left| \int_r^t |g(s,X(s))|^2 \, dsdP \right]$$

$$\le 4|t-r| C\int_\Omega \int_r^t (1+|X(s)|^2)dsdP \le 4|t-r| C\int_\Omega \int_0^T (1+|X(s)|^2)dsdP$$

Bài toán 3.11. Cho $\{X(t)\}$ là nghiệm trong định lý trên. Chứng minh với mọi $t \in [0,T]$

$$\int_\Omega |X(t)|^2 \, dP \le 3\int_\Omega |X(0)|^2 \, dP + (3T^2 + 3T + 3)C$$
$$+ (3T + 3)C \, \|X\|_{H^2} \; .$$

H.D. Đặt $\quad a(t) = \int_\Omega |X(t)|^2 \, dP \qquad \forall \; t \in [0,T].$

Dùng bất đẳng thức Schwarzt và bài toán 2.3., ta có

$$\int_\Omega |X(t)|^2 dP \le \int_\Omega |X(0) + \int_0^t f(s,X(s))ds + \int_0^t g(s,X(s))dW(s)|^2 \, dP$$

$$\le 3a(0) + 3\int_\Omega |\int_0^t f(s,X(s))ds|^2 dP + 3\int_\Omega |\int_0^t g(s,X(s))dW(s)|^2 dP$$

$$\le 3a(0) + 3\int_0^t \int_\Omega |f(s,X(s))|^2 \, dPds + 3\int_0^t \int_\Omega |g(s,X(s))|^2 \, dPds.$$

Dùng (C1), chứng minh

$$\int_{\Omega} |X(t)|^2\, dP \leq 3a(0) + (3t+3)C\int_0^t \int_{\Omega} [1 + |X(s)|^2]dPds$$

$$\leq 3a(0) + (3T^2 + 3T + 3)C$$

$$+ (3T+3)C\int_0^T \int_{\Omega} |X(s)|^2\, dPds$$

$$\leq 3\int_{\Omega} |X(0)|^2\, dP + (3T^2 + 3T + 3)C$$

$$+ (3T+3)C \| X \|_{H^2} .$$

Định nghĩa. Cho $\{W_j(t)\}$ là m tiến trình Wiener độc lập với nhau trong một không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $X_{0,i}$ là d hàm thực trên Ω, f_i và g_{ij} là các hàm thực trên $[0,T]\times\Omega$ và $\{X_i(t)\}$ là d tiến trình ngẫu nhiên sao cho $\forall\, t \in (0,T\,]$

$$X_i(t,\omega) = X_{0,i} + \int_0^t f_i(s, X(s,\omega))dt + \sum_{j=1}^{m}\int_0^t g_{ij}(s, X(s,\omega))dW_j$$

Ta nói X là nghiệm hệ phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t)) + g(t, X(t))\dfrac{dW(t)}{dt} & \forall t \in (0,T], \\ X(0) = X_0 & . \end{cases}$$

ở đây $X = (X_1,\ldots,X_d)$, $f = (f_1,\ldots,f_d)$, $W = (W_1,\ldots,W_m)$ và $g = (g_{ij})$.