CHƯƠNG BỐN

CÔNG THỨC ITÔ

Định nghĩa. Cho $\{W(t)\}$ là một tiến trình Wiener trong một không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $F \in \mathbb{H}^1(0,T)$, $G \in \mathbb{H}^2(0,T)$ và $\{X(t)\}$ là một tiến trình ngẫu nhiên sao cho

$$X(r) = X(s) + \int_s^r F dt + \int_s^r G dW \qquad \forall\ 0 \le s < r \le T.$$

Lúc đó ta nói X có vi phân ngẫu nhiên trên $[0,T]$

$$dX = F dt + G dW.$$

Cho một họ $\{\mathcal{F}(t)\}$ nonanticipating đối với một tiến trình Wiener $\{W(t)\}$ trong một không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ta ký hiệu $\mathcal{C}$ là họ các hàm số thực G trên $[a,b]\times\mathbb{R}$ có các tính chất sau:

- Có một hằng số C_1 sao cho

$$\int_\Omega |G(t,X(t,\omega)) - G(s,X(s,\omega))|^2\, dP(\omega) \le$$

$$\le C_1[|t-s| + \int_\Omega |X(t,\omega) - X(s,\omega)|^2\, dP(\omega)$$

$$\forall X \in \mathbb{H}^2(a,b,\{\mathcal{F}(t)\}),\ \ s,t \in [a,b].$$

- $G(a,Y) \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ với mọi Y trong $\mathrm{L}^2(\Omega)$.

Công thức Itô. Cho $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ là một không gian xác suất với một tiến trình Wiener $\{W(t)\}$, f và g trong S_T và F trong $\mathcal{C}$, sao cho

$$\sup\{E(f^2(t) + g^2(t)) : 0 \le t \le \mathrm{T}\} < \infty.$$

Giả sử các hàm sau đây đều thuộc $\mathcal{C}$:

$$\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, f\frac{\partial F}{\partial x}, g\frac{\partial F}{\partial x} \text{ và } g^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},$$

Cho X trong $\mathbb{H}^2(0, \mathrm{T}, \{\mathcal{F}(t)\})$ sao cho

$$d(X)(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))\, dW$$

Đặt

$$Y(t,\omega) = F(\mathrm{t},X(t,\omega)) \qquad \forall\, t \in [0,T], \omega \in \Omega\,.$$

Lúc đó Y có vi phân ngẫu nhiên

$$d(Y) = (\frac{\partial F}{\partial t} + f\frac{\partial F}{\partial x} + \tfrac{1}{2}g^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2})dt + g\frac{\partial F}{\partial x}dW,$$

hay

$$d(Y) = (\frac{\partial F}{\partial t} + \tfrac{1}{2}g^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2})dt + \frac{\partial F}{\partial x}dX$$

Phần chứng minh định lý này có thể tham khảo trong sách "Modeling with Itô stochastic differential equations" của E. Allen, Springer 2007 (trang76).

Công thức Itô có thể viết dưới dạng sau: cho f, g và F như trong định lý trên, nếu với mọi $t \in [a,b]$

$$X(t) = X(a) + \int_a^t f(s, X(s)ds + \int_a^t g(s, X(s))dW(s) \; .$$

Ta có

$$F(t, X(t)) = F(a, X(a))$$

$$+ \int_a^t [\frac{\partial F}{\partial t}(s, X(s)) + f(s, X(s))\frac{\partial F}{\partial x}(s, X(s))]ds$$

$$+ \frac{1}{2}\int_a^t g^2(s, X(s))\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X(s))ds +$$

$$+ \int_a^t g(s, X(s))\frac{\partial F}{\partial x}(s, X(s))dW(s) \qquad \forall \; t \in [a,b].$$

Thí dụ 4.1. Cho $F(t,x) = x^m$, với một số nguyên dương m. Nếu

$$X(t) = X(a) + \int_a^t f(s, X(s)ds + \int_a^t g(s, X(s))dW(s)$$

Ta có

$$X^m(t) = X^m(a)$$

$$+\int_a^t [mf(s, X(s))X^{m-1}(s) + \tfrac{m(m-1)}{2} g^2(s, X(s))X^{m-2}(s)]ds$$

$$+m\int_a^t g(s, X(s))X^{m-1}(s)dW(s) \qquad \forall\ t \in [a,b].$$

hay

$$d(X^m) = (mfX^{m-1} + \tfrac{m(m-1)}{2} g^2 X^{m-2})dt + mgX^{m-1}dW.$$

Cho $\{W_j(t)\}$ là m tiến trình Wiener độc lập với nhau trong một không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $X_{0,i}$ là d hàm thực trên Ω, f_i và g_{ij} là các hàm thực trên $[0,T] \times\Omega$ và $\{X_i(t)\}$ là d tiến trình ngẫu nhiên sao cho $\forall\ t \in (0,T\,]$

$$X_i(t,\omega) = X_{0,i} + \int_0^t f_i(s, X(s,\omega))dt + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t g_{ij}(s, X(s,\omega))dW_j$$

hay X là nghiệm hệ phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$(S)\ \begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t)) + g(t, X(t))\dfrac{dW(t)}{dt} \quad \forall t \in (0,T], \\ X(0) = X_0 \quad . \end{cases}$$

ở đây $X = (X_1,. . .,X_d)$, $f = (f_1,. . .,f_d)$, $W = (W_1,. . .,W_m)$ và $g = (g_{ij})$.

Cho $u = (u_1, \ldots, u_k)$ là một ánh xạ từ $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ vào $\mathbb{R}^k$ với một số tính chất. Đặt

$$Y_m(t,x) = u_m(t,X(t,x)) \quad \forall\ (t,x) \in [0,T]\times\Omega,\ m = 1,\ldots,k.$$

Lúc đó người ta chứng minh được công thức Itô như sau

$$d(Y_m) = \Big[\frac{\partial u_m}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} f_i \frac{\partial u_m}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_j}\Big]dt$$

$$+ \sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{d} g_{il} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} dW_l \qquad \forall\ m = 1,\cdots,k,$$

ở đây $a_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k} g_{il} g_{lj}$.

CÁC ỨNG DỤNG CÔNG THỨC ITÔ

Dùng công thức Itô chúng ta có thể tìm lời giải chính xác cho phương trình vi phân ngẫu nhiên.

Bài toán 4.1. Cho các số thực *a*, *b* và *c*. Chứng minh

$$X(t) = ce^{-at} + e^{-at}\int_0^t e^{as} b\, dW(s)$$

Là nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = -aX(t) + b\dfrac{dW(t)}{dt} & \forall t \in (0,T], \\ X(0) = c \quad . \end{cases}$$

H.D. Đặt $F(t,s) = e^{at}s$ và $Y(t,x) = F(t,X(t,x))$, dùng công thức Itô

$$d(Y) = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \tfrac{1}{2} g^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)dt + \frac{\partial F}{\partial x} dX$$

Ta có $f = a$ và $g = b$ và

$$d(e^{at}X(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial x}dX + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}g^2 dt$$

$$= \ ae^{at}X(t)dt + e^{at}[-aX(t)dt + bdW(t)] = \ e^{at}bdW(t).$$

Suy ra

$$e^{at}X(t) - X(0) = \int_0^t e^{at}bdW(t).$$

Bài toán 4.6. Cho số thực c và hai hàm số liên tục h_1 và h_2 trên $[0,T]$. Chứng minh

$$X(t) = c\exp\left[\int_0^t \left(h_1(s) - \tfrac{1}{2}h_2^2(s)\right)ds + \int_0^t h_2(s)dW(s)\right]$$

Là nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = h_1(t)X(t) + h_2(t)X(t)\dfrac{dW(t)}{dt} \quad \forall t \in (0,T], \\ X(0) = c \quad . \end{cases}$$

H.D. Đặt $g(t,X(t)) = h_2(t)X(t)$, $F(t,s) = \ln s$ và $Y(t,x)$ $=F(t,X(t,x))$, dùng công thức Itô

$$d(Y) = (\frac{\partial F}{\partial t} + \tfrac{1}{2} g^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2})dt + \frac{\partial F}{\partial x} dX$$

Ta có

$$d(\ln X(t)) = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dX + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} g^2 dt$$

$$= \frac{1}{X(t)}[h_1(t)X(t)dt + h_2(t)X(t)dW(t)] - \frac{1}{2X^2(t)} h_2^2(t)X^2(t)dt$$

$$= [h_1(t) - \frac{1}{2} h_2^2(t)]dt + h_2(t)dW(t).$$

Suy ra

$$\ln X(t) - \ln c = \int_0^t [h_1(s) - \frac{1}{2} h_2^2(s)]ds + \int_0^t h_2(s)dW(s).$$

Định nghĩa . Cho X trong $\mathbb{H}^m(\Omega)$, ta gọi

$$E(X^k(t)) = \int_\Omega X^k(t,\omega)dP(\omega) \qquad \forall\ t \in [0,T]$$

là các moment của X .

Dùng công thức Itô ta có thể tính moment của các nghiệm phương trình vi phân ngẫu nhiên.

Bài tập 4.3. Cho X là nghiệm phương trình vi phân biến ngẫu nhiên $dX(t) = dt + X(t)dW(t)$, $X(0) = 0$. Tính các moment của X.

HD. Theo thí dụ 4.1, ta có

$$d(X^m) = (mfX^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} g^2 X^{m-2})dt + mgX^{m-1}dW.$$

Với $f = 1$, và $g = X$

Vậy $d(X^m) = (mX^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} X^m)dt + mX^m dW$

hay

$$X^m(t) = \int_0^t (mX^{m-1}(s) + \frac{m(m-1)}{2} X^m(s))ds + m\int_0^t X^m(s)dW(s).$$

Đặt $u_m(t) = E(X(t))$, dùng bài toán 2.3. ta có

$$u_m(t) = \int_0^t (mu_{m-1}(s) + \frac{m(m-1)}{2} u_m(s))ds.$$

Suy ra $u'_m(t) = mu_{m-1}(t) + \frac{m(m-1)}{2} u_m(t).$

Để ý $X(t) = \int_0^t ds + \int_0^t X(s)dW(s) = t + \int_0^t X(s)dW(s).$

Do đó $u_1(t) = t$. Suy ra $u'_2(t) = 2t + u_2(t).$ và $u_2(t) = -2t - 2 + 2e^t$. Tương tự $u_3(t) = 2t + \frac{8}{3} - 3e^t + \frac{1}{3}e^{3t}$