Bất biến Alexander xoắn

HUỲNH QUANG VŨ

Tóm tắt nội dung. Đây là một bài viết ngắn giới thiệu Bất biến Alexander xoắn (twisted Alexander invariants), một đối tượng được quan tâm nhiều và có được những thành tựu đáng kể gần đây trong ngành nghiên cứu Lý thuyết Nút và Đa tạp 3 chiều.

1. Định nghĩa

Cách đơn giản nhất để định nghĩa bất biến Alexander xoắn là thông qua phép tính đạo hàm Fox.

Giả sử M là một đa tạp tôpô ba chiều, có hoặc không có biên.

Gọi π là nhóm cơ bản của M. Giả sử π có một biểu diễn hữu hạn

$$\pi = \langle x_1, x_2, \ldots, x_p \mid r_1, r_2, \ldots, r_q \rangle.$$

Cho $\rho : \pi \to \mathrm{GL}(n, R)$ là một biểu diễn (đồng cấu nhóm), trong đó R là một vành có đơn vị. Hơn nữa ta giả sử R là một UFD (unique factorization domain). Trên một UFD thì thừa số chung lớn nhất gcd được định nghĩa.

Cho G là một nhóm tự do giao hoán. Khi đó $R[G]$ cũng là một UFD. Giả sử $\alpha : \pi \to G$ là một đồng cấu.

Với $x \in \pi$ đặt $\phi(x) = \rho(x)\alpha(x)$; nói cách khác đặt $\phi = \rho \otimes \alpha$. Khi đó ϕ là một đồng cấu $\pi \to \mathrm{GL}(n, R[G])$. Mở rộng tuyến tính ϕ thành một đồng cấu vành $\mathbb{Z}[\pi] \to M(n, R[G])$.

Phép tính đạo hàm Fox là một ánh xạ: $\frac{\partial}{\partial x} : \mathbb{Z}[\pi] \to \mathbb{Z}[\pi]$ có các tính chất:

$$\frac{\partial}{\partial x}(1) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(x_i) = \delta_{i,j}$$

và

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv) = \frac{\partial}{\partial x}(u) + u\frac{\partial}{\partial x}(v).$$

Gọi M là ma trận $q \times p$ với phần tử (i, j) là $\phi(\partial r_i/\partial x_j) \in M(n, R[G])$. Xét các ma trận nhận được từ M bằng cách bỏ đi cột thứ j và $q - p + 1$ dòng khỏi M, xem mỗi ma trận như vậy như là một ma trận cấp $n(p-1) \times n(p-1)$ với phần tử trong $R[G]$, và gọi Q_j là gcd của các định thức của các ma trận này.

Giả sử rằng $\phi(x_j) \neq I$. Ta định nghĩa *bất biến Alexander xoắn* là

$$\Delta^{\phi}(M) = \frac{Q_j}{\det \phi(1 - x_j)}.$$

Đây là một phần tử trong trường thương $Q(R[G])$.

[1]Bài viết này nhằm phục vụ báo cáo của tác giả tại hội nghị Đại số-Hình học-Tôpô tại Đại học Huế, 24–26 tháng 9 năm 2009.

M. Wada [Wad94] đã chứng minh rằng $\Delta^{\rho}(M)$ không phụ thuộc vào cách chọn j và và cách chọn biểu diễn của π, và được xác định sai khác một nhân tử khả nghịch trong $R[G]$.

2. Giải thích thông qua đồng điều

Bất biến này có thể định nghĩa thông qua nhóm đồng điều như sau.

Mỗi đa tạp tôpô 3 chiều có một cấu trúc phức đơn hình (simplicial complex) và do đó là một phức ô (cell complex).

Gọi $\widetilde{M}$ là phủ phổ dụng (universal cover) của M.

Một cấu trúc phức ô (hữu hạn) trên M cảm sinh một cấu trúc phức ô trên $\widetilde{M}$, bằng cách nâng mỗi ô của M lên $\widetilde{M}$. Nhóm cơ bản π của M tác động (trái) lên nhóm phức ô $C_i(\widetilde{M}, \mathbb{Z})$, khiến cho nó là một môđun (trái) trên vành $\mathbb{Z}[\pi]$.

Như phần trước, ta có một đồng cấu $\phi : \pi \to \mathrm{GL}(n, R[G])$. Đồng cấu này cảm sinh một cấu trúc $\mathbb{Z}[\pi]$-môđun phải trên $R[G]^n$ như sau: với $\gamma \in \pi$ và $v \in R[G]^n$ định nghĩa $v \cdot \gamma = \phi(\gamma)(v)$, rồi mở rộng tuyến tính công thức này.

Vậy ta có thể lập tích tenxơ $R[G]^n \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} C_i(\widetilde{M}, \mathbb{Z})$. Ta xem đây như là một môđun trên $R[G]$. Khi đó nhóm đồng điều $H_i(R[G]^n \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} C_i(\widetilde{M}, \mathbb{Z}))$ là một $R[G]$-môđun.

Bây giờ ta giả thiết thêm là R là một UFD Noether. Khi đó $R[G]$ là một UFD Noether.

Vì $H_i(R[G]^n \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} C_i(\widetilde{M}, \mathbb{Z}))$ là một môđun hữu hạn sinh trên một vành Noether nên nó có một biểu diễn hữu hạn [Eis95, tr. 29]:

$$R[G]^l \to R[G]^k \to H_i(R[G]^n \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} C_i(\widetilde{M}, \mathbb{Z})) \to 0.$$

Gọi A là ma trận $l \times k$ đại diện cho phép đồng cấu $R[G]^l \to R[G]^k$ ở trên. Xét iđêan sinh bởi các định thức của các ma trận con cấp $k \times k$ của A, iđêan này thực ra không phụ thuộc vào biểu diễn A, sinh bởi một phần tử của $R[G]$, chính là gcd của các định thức đó, gọi là bậc (order) của môđun, kí hiệu là $\mathrm{ord}(H_i(R[G]^n \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} C_i(\widetilde{M}, \mathbb{Z})))$. Bậc này xác định sai khác một phần tử khả nghịch của $R[G]$.

Ta đặt $\Delta_i^{\phi}(M) = \mathrm{ord}(H_i(R[G]^n \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} C_i(\widetilde{M}, \mathbb{Z})))$.

Ta có kết quả sau liên hệ định nghĩa của Wada với giải thích đồng điều (Kirk-Livingston, 1999, [KL99]):

$$\Delta^{\phi}(M) = \frac{\Delta_1^{\phi}(M)}{\Delta_0^{\phi}(M)}.$$

Đa thức Alexander cổ điển chính là $\Delta_1^{\phi}(M)$ với ρ là biểu diễn tầm thường $\pi \to 1$ và $\alpha : \pi \to H_1(M)/\mathrm{Tors} H_1(M) = G$.

3. Quan hệ với Reidemeister torsion

Reidemeister torsion là một bất biến cổ điển trong lý thuyết nút và lý thuyết đa tạp, được sử dụng bởi nhiều nhà toán học lớn như Milnor, Kirby, Witten trong những thành tựu quan trọng như phân loại đa tạp, mối liên quan giữa tôpô và vật lí toán.

Reidemeister torsion ứng với một biểu biễn của nhóm cơ bản vào $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ được nghiên cứu từ đầu những năm 1990.

Cho (C, ∂) là một dãy phức hữu hạn các không gian vectơ trên một trường $\mathbb{F}$:

$$0 \to C_m \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \to 0.$$

Giả sử C là khớp và mỗi C_i có một cơ sở c_i.

Chọn một cơ sở b_i cho $B_i = \operatorname{Im}\partial_{i+1} = \ker\partial_i$.

Từ dãy khớp ngắn $0 \to B_i \hookrightarrow C_i \twoheadrightarrow B_{i-1} \to 0$, bằng cách lấy nâng $\tilde{b}_{i-1}$ của b_{i-1} lên C_i, ta có cơ sở $b_i\tilde{b}_{i-1}$ cho C_i.

Reidemeister torsion của C được định nghĩa là

$$\tau(C) = \prod_{i=0}^{m} [b_i\tilde{b}_{i-1}/c_i]^{(-1)^{i+1}},$$

ở đây $[b, c]$ chỉ định thức của ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở c sang cơ sở b.

Nếu dãy phức C không khớp thì ta định nghĩa $\tau(C) = 0$.

$\tau(C)$ phụ thuộc vào c_i nhưng không phụ thuộc vào sự lựa chọn b_i và $\tilde{b}_i$.

Bây giờ xét một đa tạp 3 chiều M với một cấu trúc phức ô hữu hạn với những kí hiệu như phần trước.

Ta có một đồng cấu $\phi : \mathbb{Z}[\pi] \to \mathrm{GL}(n, R[G]) \hookrightarrow \mathrm{GL}(n, Q(R[G]))$.

Dùng ϕ ta có thể biến $Q(R[G])^n$ thành một $\mathbb{Z}[\pi]$-môđun.

Xây dựng dãy phức $Q(R[G])^n \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} C_*(\widetilde{M})$ của các không gian véctơ trên $Q(R[G])$.

Reidemeister torsion của M ứng với biểu diễn ϕ được định nghĩa là

$$\tau^{\phi}(M) = \tau(Q(R[G])^n \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} C_*(\widetilde{M})).$$

$\tau^{\rho}(M)$ được xác định sai khác một nhân tử thuộc về $\pm\det(\phi(\pi))$.

Reidemeister torsion không phụ thuộc vào cấu trúc phức ô của đa tạp.

Định lí sau dựa trên một kết quả của Turaev [Tur01, p. 20]:

ĐỊNH LÝ 3.1.

$$\tau^{\phi}(M) = \frac{\Delta_1^{\phi}(M)}{\Delta_0^{\phi}(M)\Delta_2^{\phi}(M)} = \frac{\Delta^{\phi}(M)}{\Delta_2^{\phi}(M)}.$$

4. Ứng dụng trong phân biệt nút

Một nút trong mặt cầu 3 chiều S^3 là một tập con của S^3 đồng phôi với S^1.Hai nút được gọi là tương đương nếu tồn tại một đồng phôi từ S^3 lên chính nó mang nút này thành nút kia.

Nếu K là một nút thì ta có thể xét phần bù của nó, cụ thể là $S^3 \setminus N(K)$ trong đó $N(K)$ là một lân cận ống mở (open tubular neighborhood) của K, một đa tạp 3 chiều có biên. Một định lí của Gordon và Luecke (1989) nói rằng hai nút là tương đương khi và chỉ khi phần bù của chúng đồng phôi, nói cách khác, phần bù của nút xác định nút. Bất biến Alexander của $S^3 \setminus K$ được gọi là bất biến Alexander của K.

Ví dụ 4.1. Nếu K là nút không thắt, tức nút tương đương với S^1, thì nhóm cơ bản của phần bù của K là cyclic vô hạn, do đó $\Delta^{\phi}(K) = 1$.

4.1. Phân biệt nút không thắt. Bài toán phân biệt nút là một bài toán cơ bản của lý thuyết nút. Định lý sau đây của D. Silver và S. Williams [SW06] nói rằng bất biến Alexander phân biệt được nút không thắt.

ĐỊNH LÝ 4.2. *Giả sử K là nút không thắt. Khi đó tồn tại một đồng cấu từ π vào một nhóm hoán vị S_n, đồng cấu này sinh ra một biểu diễn $\rho : \pi \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$. Lấy $\alpha : \pi \to \mathbb{Z} = \langle t \rangle$, mang mỗi phần tử sinh của π thành t. Khi đó $\Delta^{\phi}(K) \neq 1$.*

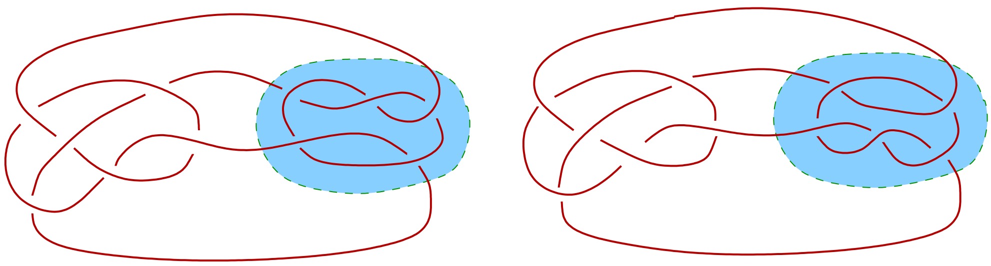
Trong khi đó đến lúc này ta vẫn chưa biết đa thức Jones có phân biệt được nút không thắt hay không.

4.2. Phân biệt nút đột biến (mutant). Hai nút K_1 và K_2 được gọi là đột biến của nhau (mutant) nếu K_1 có thể nhận được từ K_2 bằng cách lấy một mặt cầu cắt nút K_1 tại đúng 4 điểm rồi xoay quả cầu một góc 180°.

Nếu hai nút là đột biến của nhau thì bất biến Alexander cổ điển của chúng bằng nhau. Nói chung rất khó phân biệt hai nút là đột biến của nhau.

M. Wada [Wad94] đã tính bất biến Alexander xoắn của hai nút đột biến của nhau là nút Conway và nút Kinoshita–Terasaka, ứng với các biễu diễn của nhóm cơ bản vào $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_7)$ và với $\alpha : \pi \to \mathbb{Z} = \langle t \rangle$ mang mỗi phần tử sinh của π thành t, và đã nhận được hai tập giá trị khác nhau, như vậy phân biệt được hai nút này.

Trong khi đó đa thức Jones không phân biệt được hai nút này.



HÌNH 1. Nút Conway (11n34 trong kí hiệu Dowker) (bên trái) và nút Kinoshita-Terasaka (11n42) (bên phải) là đột biến của nhau.

Câu hỏi 4.3. Bất biến Alexander xoắn có phân biệt được hai nút đột biến của nhau bất kì hay không?

4.3. Xác định nút phân thớ. Một nút được gọi là phân thớ (fibered) nếu phần bù của nó trong S^3 là một không phân thớ trên đường tròn S^1 với mỗi thớ là một mặt (surface bundle over S^1).

Một kết quả cổ điển cho biết là đa thức Alexander của một nút phân thớ là một đa thức một biến có hệ số bậc cao nhất là 1. Tuy nhiên đây chỉ là một điều kiện cần chứ không đủ.

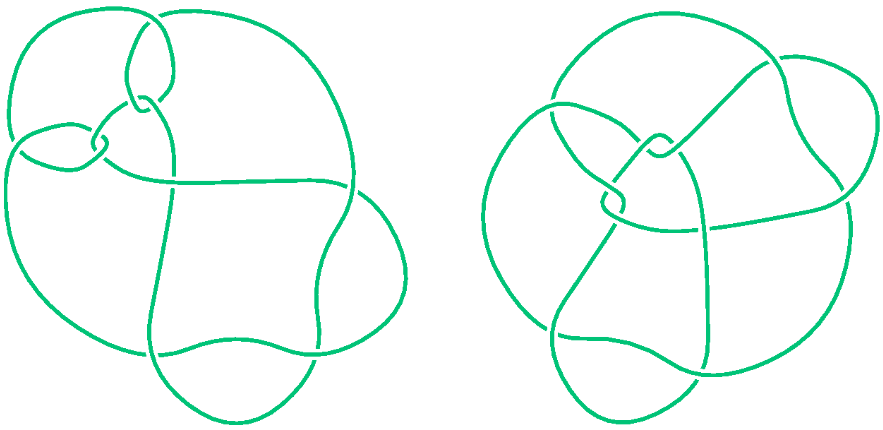
Giả sử ρ là một đồng cấu từ π vào một nhóm hữu hạn G. Dùng tác động nhân trái của G lên $\mathbb{Z}[G]$ có thể xét đồng cấu $\rho : \pi \to G \to \mathrm{Auto}(\mathbb{Z}[G]) = \mathrm{GL}(|G|, \mathbb{Z}[G])$. Xét $\alpha : \pi \to \mathbb{Z} = \langle t \rangle$. Friedl và Vidussi (2009) [FV09] đã chứng minh một điều kiện đủ:

ĐỊNH LÝ 4.4. *Cho M là phần bù của một nút hoặc là một đa tạp không có biên. Nếu với mọi α như trên, đa thức Alexander xoắn $\Delta^{\rho\otimes\alpha}(M)$ có hệ số bậc cao nhất là* 1 *và* $\deg \Delta_1^{\rho\otimes\alpha}(M) - \deg \Delta_0^{\rho\otimes\alpha}(M) - \deg \Delta_2^{\rho\otimes\alpha}(M) = \|\alpha\| |G|$, *thì M phân thớ trên đường tròn.*

Ở đây $\|\cdot\|$ chỉ chuẩn Thurston.

Kết quả này có ứng dụng sâu về sự tồn tại cấu trúc symplectic trên đa tạp 4 chiều.

4.4. Phân biệt nút nói chung. Friedl và Vidussi (2007) [FV07] chỉ ra rằng hai nút 10a40 và 10a103 có thể phân biệt được bằng cách tính bất biến Alexander xoắn ứng với biểu diễn của nhóm cơ bản vào $GL(4, \mathbb{F}_{13})$ và $\alpha : \pi \to \mathbb{Z} = \langle t \rangle$ mang mỗi phần tử sinh của π thành t. Trong khi đó, đa thức Alexander cổ điển, đa thức Jones, đa thức HOMFLYPT, đồng điều Khovanov và đồng điều Floer không phân biệt được hai nút này.



HÌNH 2. Nút 10a40 (bên trái) và nút 10a103 (bên phải).

Một định lí của Waldhausen nói rằng nút được xác định bởi nhóm cơ bản cùng với lớp đồng luân của đường kinh tuyến và lớp đồng luân của đường vĩ tuyến của nút, gọi là một hệ ngoại vi (peripheral system). Hơn nữa các kết quả vào cuối những năm 1980 khẳng định là hai nút nguyên tố (prime, nghĩa là nút đó không phải là tổng liên thông của hai nút có thắt) là tương đương khi và chỉ khi nhóm cơ bản của hai nút đó là đẳng cấu [Lic97, p. 115]. Như vậy có cơ sở để đặt câu hỏi:

Câu hỏi 4.5. Bất biến Alexander xoắn có phân biệt được tất cả các nút hay không?

Đối với các nút không nguyên tố nhóm cơ bản không đủ để phân biệt, do đó cần cải tiến bất biến Alexander, cần có thêm thông tin từ hệ ngoại vi. Một hướng tiếp cận, bởi J. Dubois, tác giả, và Y. Yamaguchi [DHY09], là xét Reidemeister torsion *xác định dấu*. Dấu này lấy thông tin từ hệ ngoại vi.

Tài liệu

[DHY09] Jerome Dubois, Vu Huynh, and Yoshikazu Yamaguchi, *Nonabelian Reidemeister torsion of twist knots*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications **18** (2009), no. 3, 303–341.

[Eis95] David Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer, 1995.

[FV07] Stefan Friedl and Stefano Vidussi, *Nontrivial Alexander polynomial of knots and links*, Bull. London Math. Soc. **39** (2007), 614–622.

[FV09] Stefan Friedl and Stefano Vidussi, *A survey of twisted Alexander polynomials*, 2009, arXiv:0905.0591.

[KL99] Paul Kirk and Charles Livingston, *Twisted Alexander invariants, Reidemeister torsion, and Casson-Gordon invariants*, Topology **38** (1999), no. 3, 635–661.

[Lic97] W. B. Raymond Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 175, Springer, 1997.

[SW06] Daniel S. Silver and Susan G. Williams, *Twisted Alexander polynomial detects the unknot*, Algebraic and Geometric Topology **6** (2006), 1893–1901.

[Tur01] Vladimir Turaev, *Introduction to combinatorial torsions*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001, Notes taken by Felix Schlenk.

[Wad94] Masaaki Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, Topology **33** (1994), no. 2, 241–256.

KHOA TOÁN-TIN HỌC, TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH, 227 NGUYỄN VĂN CỪ, QUẬN 5, THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH, VIỆT NAM

E-mail address: hqvu@hcmus.edu.vn

URL: http://www.math.hcmus.edu.vn/~hqvu