SVCH Khóa 15: Trần Tuấn Anh
Ngành: Giải Tích
Môn học: Giải Tích Hàm Nâng Cao
Thầy: Huỳnh Quang Vũ

BÀI LÀM BÀI TẬP 4

(nộp ngày 13/11/05)

Bài 1: (Định lý Mazur) Cho X là một kglđp. Giả sử lưới $\{x_i\}_{i\in I}$ hội tụ yếu về x. Chứng minh rằng có một lưới gồm các tổ hợp lồi của các x_i (tức là các điểm có dạng $\sum_{j\in J} t_j x_j$ trong đó J là một tập hữu hạn, $t_j \geq 0$ và $\sum_{j\in J} t_j = 1$) hội tụ mạnh về x.

Chứng minh:

Đặt $A = \mathrm{co}\{x_i : i \in I\}$ thì điều cần chứng minh tương đương với việc chỉ ra $x \in \overline{A}$.

Thật vậy, do lưới $\{x_i\}_{i\in I} \subset A$ hội tụ yếu về x nên $x \in \overline{A}^{\mathrm{wk}}$. Mặt khác, do A là một tập lồi trong kglđp X nên $\overline{A}^{\mathrm{wk}} = \overline{A}$. Từ đó suy ra $x \in \overline{A}^{\mathrm{wk}} = \overline{A}$. Đến đây ta có đpcm.

Bài 2: Cho X là một kgđc. Cho dãy $\{T_n\}$ trong X^* sao cho $\{\|T_n\|\}$ bị chặn. Chứng minh rằng khi đó có $T \in X^*$ và một dãy con $\{T_{n_k}\}$ của dãy $\{T_n\}$ sao cho $\{T_{n_k}(x)\}$ hội tụ về $T(x)$ với mọi $x \in X$.

Chứng minh:

Điều cần chứng minh tương đương với việc chỉ ra sự tồn tại của một dãy con $\{T_{n_k}\}$ của dãy $\{T_n\}$ sao cho $T_{n_k} \xrightarrow{\mathrm{wk}^*} T \quad (1)$.

Thật vậy, do $\{\|T_n\|\}$ bị chặn nên tồn tại $M > 0$ sao cho $\{T_n\} \subset \overline{B_{X^*}}(0, M) \quad (2)$.

Theo định lý Banach-Alaoglu thì $\overline{B_{X^*}}(0,1)$ là tập compact dưới tôpô yếu sao. Từ đó suy ra $\overline{B_{X^*}}(0,M) = M.\overline{B_{X^*}}(0,1)$ cũng là tập compact dưới tôpô yếu sao. Kết hợp điều này với (2) ta dễ dàng có được (1). Đến đây ta có đpcm.

Bài 3: Cho X là một kgđc. Chứng tỏ $\tau(x)$ là liên tục trên $(X^*, \|\ \|)$. Suy ra tôpô $(X^*, \|\ \|)$ mạnh (mịn) hơn tôpô (X^*, wk^*) và $(X^*, \|\ \|)^* \supset (X^*, \mathrm{wk}^*)^* = X$.

Chứng minh:

Cho $\{y_n^*\}$ là một dãy trong X^* hội tụ theo chuẩn về $y^* \in X^*$. Ta cần chứng minh $\{\tau(x)(y_n^*)\}$ hội tụ về $\tau(x)(y^*)$ trong F, tức là chứng minh $\{\langle y_n^*, x\rangle\}$ hội tụ về $\langle y^*, x\rangle$ trong F, hay $\langle y_i^*, x\rangle - \langle y^*, x\rangle \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad (1)$. Thật vậy, do $\|y_n^* - y^*\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ nên

$$\left|\left\langle y_i^*, x\right\rangle - \left\langle y^*, x\right\rangle\right| = \left|\left\langle y_i^* - y^*, x\right\rangle\right| \le \left\| y_i^* - y^* \right\| . \left\| x \right\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Từ đó ta có được (1). Ngoài ra từ (1) ta thấy sự hội tụ theo chuẩn trong X^* luôn dẫn theo sự hội tụ theo tôpô yếu sao trong X^*. Do đó tôpô $\left(X^*, \| \ \|\right)$ mạnh (mịn) hơn tôpô $\left(X^*, \mathrm{wk}^*\right)$, tức là một tập mở đối với tôpô $\left(X^*, \mathrm{wk}^*\right)$ thì cũng mở đối với tôpô $\left(X^*, \| \ \|\right)$. Khi đó, một phiếm hàm liên tục trên $\left(X^*, \mathrm{wk}^*\right)$ thì cũng liên tục trên $\left(X^*, \| \ \|\right)$. Điều đó chứng tỏ $X = \left(X^*, \mathrm{wk}^*\right)^* \subset \left(X^*, \| \ \|\right)^*$.

<u>Bài 4</u>: Cho X là một kgđc phản xạ. Cho dãy $\{x_n\}$ trong X sao cho $\{\|x_n\|\}$ bị chặn. Chứng minh rằng khi đó có $x \in X$ và một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của dãy $\{x_n\}$ sao cho $\left\{T\left(x_{n_k}\right)\right\}$ hội tụ về $T(x)$ với mọi $T \in X^*$.

<u>Chứng minh</u>:

Điều cần chứng minh tương đương với việc chỉ ra sự tồn tại của một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của dãy $\{x_n\}$ sao cho $x_{n_k} \xrightarrow{\mathrm{wk}} x \quad (1)$.

Thật vậy, do $\{\|x_n\|\}$ bị chặn nên tồn tại $M > 0$ sao cho $\{x_n\} \subset \overline{B_X}(0, M) \quad (2)$.

Theo định lý Banach-Alaoglu áp dụng cho kgđc $\left(X^*, \| \ \|\right)$ thì $\overline{B_{\left(X^*, \| \ \|\right)^*}}(0, M)$ là tập compact dưới tôpô yếu sao-sao trên $\left(X^*, \| \ \|\right)^*$. Từ đây suy ra $\overline{B_X}(0, M)$ là tập compact dưới tôpô yếu trên X (do X là kgđc phản xạ). Kết hợp điều này với (2) ta dễ dàng có được (1). Đến đây ta có đpcm.