Nguyễn Thành Nhựt
Cao học Đại số-Lý thuyết số K15
Học phần Giải tích hàm nâng cao

Bài tập 5

Cho X, Y là các không gian Banach.

1. Cho $1 < p < \infty$ và xét $S : l^p \to l^p$ với $S\left((x_1, x_2, ...)\right) = (0, x_1, x_2, ...)$.
a. Chứng tỏ $S \in \mathcal{B}(l^p)$. Tính S^*.
b. Chứng tỏ *S* có một không gian con bất biến không tầm thường.

a) i. S is well-defined?

$x \in l^p$, $y = S(x) = (0, x_1, x_2, ...) = (y_1, y_2, ...)$ có $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \Rightarrow y \in l^p$.

ii. S is linear?

Cho $x, y \in l^p$, $\alpha \in \mathbb{F}$ với $x = (x_1, x_2, ...)$, $y = (y_1, y_2, ...)$. Vì phép nhân vô hướng và phép cộng vector trên l^p là tuyến tính liên tục nên ta có:

$S(\alpha x + y) = (0, \alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, ...) = (0, \alpha x_1, \alpha x_2, ...) + (0, y_1, y_2, ...)$
$= \alpha S(x) + S(y)$.

iii. S is continuous?

S đã tuyến tính. *S* liên tục $\Leftrightarrow \exists M > 0, \|Tx\| \le M\|x\|$. Chọn *M* = 1, ta có:

$\|Tx\| = \|(0, x_1, x_2, ...)\| = \|(x_1, x_2, ...)\| = \|x\|$.

iv. S^*=?

$S^* : (l^p)^* \to (l^p)^*$, $S^*y^*(x) := \langle S^*y^*, x\rangle = \langle y^*, Sx\rangle$. Lưu ý: $(l^p)^* = l^q$, với $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

b) Xét $M_n = \left\{x \in l^p : x_k = 0, 1 \le k \le n\right\}$.

i. $M_n \subset l^p$ *theo định nghĩa, và* $(0) \ne M_n \ne l^p$.

ii. M_n *là không gian con*?

Với mọi $x, y \in M_n$ và $\alpha \in \mathbb{F}$. Vì phép nhân vô hướng và phép cộng vector trên l^p là tuyến tính liên tục nên $\alpha x + y \in l^p$ và $(\alpha x + y)_k = \alpha x_k + y_k = 0$, $1 \le k \le n$. Vậy $\alpha x + y \in M_n$.

iii. M_n *bất biến với S*?

Cho $x \in M_n$, ta có $x = (\underbrace{0,0,...,0}_{(n) times}, x_{n+1}, x_{n+2}, ...)$. Suy ra:

$S(x) = (\underbrace{0,0,...,0}_{(n+1) times}, x_{n+1}, x_{n+2}, ...) \in M_n$. □

2. Giả sử $T \in \mathcal{B}_0(X)$ và *T* có ánh xạ ngược. Chứng minh *X* là hữu hạn chiều.

Nhắc lại: "*E* là hữu hạn chiều khi và chỉ khi *E* compact địa phương" (bài tập 1.6.6 [2]).

Áp dụng Định lý Ánh xạ ngược, ta có $T^{-1} \in \mathcal{B}(X)$. Và vì $\mathcal{B}_0(X)$ là một ideal 2 phía đóng của đại số $\mathcal{B}(X)$ nên $TT^{-1} \in \mathcal{B}_0(X)$, hay $Id_X \in \mathcal{B}_0(X)$. Suy ra $\overline{B(0,\varepsilon)} = \overline{Id_X(B(0,\varepsilon))}$ là compact trong *X*, hay *X* compact địa phương. Vậy *X* hữu hạn chiều. □

3. Giả sử $T \in \mathcal{B}_0(X,Y)$ và $ranT$ là tập đóng. Chứng minh rằng $ranT$ là hữu hạn chiều.

Ta cần chứng minh $ranT$ là compact địa phương.

Ta có: $T : X \to ranT$ là toàn ánh, áp dụng Định lý Ánh xạ mở suy ra $T(B(0,\varepsilon))$ là mở trong $ranT$ (vì $B(0,\varepsilon)$ là mở trong *X*). Khi đó, tồn tại $B(a,r) \subset T(B(0,\varepsilon))$ (1).

Mặt khác $T \in \mathcal{B}_0(X,Y)$, nên $\overline{T(B(0,\varepsilon))}$ là compact trong *Y*. Mà $ranT$ là đóng, do đó $\overline{T(B(0,\varepsilon))} \cap ranT$ là compact (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\overline{B(a,r)}$ (đóng) $\subset \overline{T(B(0,\varepsilon))} \cap ranT$ (compact), nên $\overline{B(a,r)}$ là compact trong $ranT$. Vậy $ranT$ là compact địa phương. □

4. Giả sử $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ và *Y* là hữu hạn chiều. Chứng minh rằng $T \in \mathcal{B}_0(X,Y)$.

Ta cần chứng minh $\overline{T(B(0,\varepsilon))}$ là compact trong *Y*.

Ta có: $B(0,\varepsilon)$ bị chặn trong *X*. Mà $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, nên $T(B(0,\varepsilon))$ bị chặn trong *Y*. Mặt khác, *Y* là hữu hạn chiều, do đó *Y* compact địa phương. Suy ra $\overline{T(B(0,\varepsilon))}$ là compact trong *Y*. □

Tài liệu tham khảo

[1] John B. Conway, A Course in Functional Analysis, 2nd ed, Springer-Verlag, 1990.

[2] Dương Minh Đức, Giải tích hàm, NXB ĐHQG Tp.HCM, 2005.