

**Giải tích hàm nâng cao**  
**Cao học khóa 15, học kì I, 2005**  
**Họ tên: Đinh Ngọc Quý**  
**NCS chuyên ngành Lý thuyết tối ưu**

## BÀI TẬP 2

**Bài 1:**

$$P_A(x) = \{t \geq 0, x \in tA\}. \text{ Xét } A = B(0,1)$$

Nhận xét rằng khi  $x=0$  ta có  $P_A(0) = 0 = \|0\|$

Với  $x \neq 0$ , ta có:

$$P_A(x) = \inf \{t > 0 | x \in tA\} = \inf \{t > 0 | \frac{x}{t} \in A\} = \inf \{t > 0 | \frac{\|x\|}{t} < 1\} = \inf \{t > 0 | \|x\| < t\} = \|x\|$$

Công thức này bao hàm luôn cả trường hợp  $x=0$ . Vậy có  $P_A(x) = \|x\|$

Chúng ta chứng minh tương tự cho trường hợp  $A = \bar{B}(0,1)$ .

**Bài 2:**

Nhận xét  $P_A(0,0) = 0$  với cả ba câu (a), (b), (c) nên khi giải ta chỉ xét cho trường hợp  $(x,y) \neq (0,0)$  (tức không xảy ra trường hợp  $t=0$  để  $(x,y) \in tA$ ) nên

$$P_A(x,y) = \inf \{t > 0 | (x,y) \in tA\} \text{ hay } P_A(x,y) = \inf \{t > 0 | (\frac{x}{t}, \frac{y}{t}) \in A\}$$

**a)**  $A = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$P_A(x,y) = \inf \{t > 0 | (\frac{x}{t}, \frac{y}{t}) \in A\} = \inf \{t > 0 | \sqrt{x^2 + y^2} \leq t\} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

**b)**  $A = \{(x,y) | \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$

$$P_A(x,y) = \inf \{t > 0 | (\frac{x}{t}, \frac{y}{t}) \in A\} = \inf \{t > 0 | \max\{|x|, |y|\} \leq t\} = \max\{|x|, |y|\}$$

**c)**  $A = \{(x,y) | |x| + |y| \leq 1\}$

$$P_A(x,y) = \inf \{t > 0 | (\frac{x}{t}, \frac{y}{t}) \in A\} = \inf \{t > 0 | |x| + |y| \leq t\} = |x| + |y|$$

Chú ý cả 3 công thức ở câu (a), (b), (c) đều đúng cho cả trường hợp  $(x,y) = (0,0)$

**Bài 3:**

**a)** Ta kiểm tra  $P_A$  là một phiên hàm dưới tuyến tính liên tục

- Dễ thấy  $P_A(x) \geq 0, \forall x \in X$ .
- Với  $\forall \lambda > 0, \forall x \in X$ , ta có:

$$P_A(\lambda x) = \inf \{t \geq 0 | \lambda x \in tA\} = \lambda \inf \{\frac{t}{\lambda} > 0 | x \in \frac{t}{\lambda} A\} = \lambda P_A(x)$$

- Dễ dàng kiểm tra cho tính nửa cộng tính cho trường hợp  $x=y=0$  (dựa vào  $P_A(0)=0$ )  
 Với  $\forall x, y \in X, x \neq 0, y \neq 0$  ta có với  $\forall \varepsilon > 0$ , chọn được  $\lambda > 0, \mu > 0$  sao cho:

$$\begin{cases} P_A(x) < \lambda < P_A(x) + \varepsilon \\ P_A(y) < \mu < P_A(y) + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_A(\frac{x}{\lambda}) < 1 \\ P_A(\frac{y}{\mu}) < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists t \in (0,1): \frac{x}{\lambda} \in tA \\ \exists v \in (0,1): \frac{y}{\mu} \in vA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists t \in (0,1): \frac{x}{\lambda t} \in A \\ \exists v \in (0,1): \frac{y}{\mu v} \in A \end{cases}$$

Kết hợp với A lồi chứa 0 nên:

$$\begin{cases} \frac{x}{\lambda} = t \cdot \left(\frac{x}{\lambda t}\right) + (1-t) \cdot 0 \in A \\ \frac{y}{\mu} = v \cdot \left(\frac{y}{\mu v}\right) + (1-v) \cdot 0 \in A \end{cases}, \text{Vậy có } \frac{x}{\lambda} \in A, \frac{y}{\mu} \in A.$$

A lời nên:  $\frac{x+y}{\lambda+\mu} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) \frac{x}{\lambda} + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) \frac{y}{\mu} \in A$ . Suy ra  $P_A(x+y) \leq \lambda + \mu$ .

Kết hợp với điều kiện chọn  $\lambda, \mu$  ban đầu ta có:  $\lambda + \mu < P_A(x) + P_A(y) + 2\varepsilon$

Vậy:  $P_A(x+y) < P_A(x) + P_A(y) + 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ .

Cho  $\varepsilon \rightarrow 0$  ta được  $P_A(x+y) \leq P_A(x) + P_A(y)$

Từ các điều kiện trên ta suy ra  $P_A$  là một phiên hàm dưới tuyến tính trên kgvt X. Vậy tiếp theo để chứng minh  $P_A$  liên tục ta chỉ cần chứng minh  $P_A$  liên tục tại  $x=0$ .

Ta xét lưới  $\{x_\alpha\}: x_\alpha \rightarrow 0$ . Vì A mở chứa 0, nên với  $\forall \varepsilon > 0$  bé tùy ý ta có  $\varepsilon A$  là lân cận mở của 0. Suy ra  $\exists \alpha_0, \forall \alpha \geq \alpha_0: x_\alpha \in \varepsilon A$ , kéo theo  $0 \leq P_A(x_\alpha) \leq \varepsilon$ . Chứng tỏ  $P_A(x_\alpha) \rightarrow 0$

Vậy  $P_A$  liên tục tại  $x=0$ , suy ra  $P_A$  liên tục.

b) Với  $(x, y) = (0, 0): P_S(0, 0) = 0$ . Ta xét trường hợp  $(x, y) \neq (0, 0)$ :

$$P_S(x, y) = \inf \{t > 0 \mid \left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) \in S\} = \inf \{t > 0 \mid |y| < t\} = |y|$$

- Kiểm tra S cân bằng:

Xét  $(x, y) \in S$  thì  $|y| < 1$ . Ta có  $\forall \lambda: |\lambda| \leq 1$  thì  $|\lambda y| = |\lambda| \cdot |y| < 1$ , nên  $(\lambda x, \lambda y) \in S$

- Dễ dàng kiểm tra tính chất nửa chuẩn của hàm  $P_S(x, y) = |y|$

#### Bài 4:

( $\Leftarrow$ ) Giả sử  $x_0 \in \overline{M}$ . Suy ra tồn tại lưới  $\{x_\alpha\} \subset M: x_\alpha \rightarrow x_0$ . Khi đó

$\forall \alpha, f(x_\alpha) = 0 \rightarrow f(x_0) = 1$ . Điều này mâu thuẫn với  $f \in X^i$ .

( $\Rightarrow$ ) Ta xét hàm dung lượng của M và kí hiệu là P. Ta có  $x_0 \notin \overline{M}$  nên  $P(x_0) \geq 1$ .

Đặt  $G = \langle x_0 \rangle$  và  $g: G \rightarrow R$  với  $g(\lambda x_0) = \lambda$ . Khi đó ta có  $g(x) \leq p(x), \forall x \in G$

Thật vậy:

- Với  $x = \lambda x_0, \lambda > 0: P(\lambda x_0) = \lambda P(x_0) \geq \lambda = g(\lambda x_0)$ .
- Với  $x = \lambda x_0, \lambda \leq 0: P(\lambda x_0) \geq 0 \geq \lambda = g(\lambda x_0)$ .

Áp dụng định lý Hahn-Banach suy ra tồn tại phiên hàm tuyến tính f trên X là thác triển của g sao cho:  $f(x) \leq p(x), \forall x \in X$ .

Nhận xét rằng:

- $f(x_0) = g(x_0) = 1$
- $p(x) = 0, \forall x \in M \Rightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in M$ .

Mặt khác do M là không gian con nên nếu  $x \in M \Rightarrow (-x) \in M$ . Vậy nên:

$$f(x) = f(-(-x)) = -f(-x) \geq 0, \forall x \in M.$$

Chứng tỏ  $f(x) = 0, \forall x \in M$ .

- Ta chứng minh rằng f liên tục trên X. Vì f là phiên hàm tuyến tính trên X nên ta chỉ cần chứng minh f liên tục tại  $x=0$ .

Thật vậy với  $\{x_\alpha\}: x_\alpha \rightarrow 0$ . Vì M là không gian con nên  $0 \in M$ . Suy ra

$\exists \alpha_0, \forall \alpha \geq \alpha_0: x_\alpha \in M$  hay  $f(x_\alpha) = 0$ . Chứng tỏ  $f(x_\alpha) \rightarrow f(0)$ .

#### Bài 5:

Nếu  $f=0$  thì hiển nhiên đúng. Ta xét với trường hợp  $f \neq 0$ . Suy ra tồn tại  $x_0 \in M : f(x_0) \neq 0$ . Không mất tổng quát ta có thể giả sử  $f(x_0) = 1$  (nếu không ta có thể chọn  $\frac{x_0}{f(x_0)} \in M$  thay thế). Khi đó  $x_0 \notin \overline{\ker f}$ , để ý  $\ker f$  là một không gian con của  $X$ .

Áp dụng bài tập 4 với  $M = \ker f$  ta sẽ tồn tại phiên hàm tuyến tính  $F$  liên tục trên  $X$  sao cho  $F(x_0) = 1$  và  $F(\ker f) = \{0\}$ . Vậy bây giờ ta chỉ cần phải chứng minh  $F$  là mở rộng của  $f$

Thật vậy: xét bất kì  $x \in M$ , giả sử  $f(x) = A$ . Khi đó ta có

$$f(x) = A = A \cdot f(x_0) = f(Ax_0) \Rightarrow (x - Ax_0) \in \ker f \Rightarrow x \in (Ax_0 + \ker f).$$

Vậy nên  $F(x) = F(Ax_0 + \ker f) = F(Ax_0) + F(\ker f) = F(Ax_0) = AF(x_0) = A = f(x)$

Tới đây ta đã kết thúc phần chứng minh. Bài tập 5 cũng có một chứng minh khác trong sách Giải tích hàm của PGS. PTS Đỗ Văn Lưu (trang 134,135).