Giải tích Hàm Nâng cao
Cao học khóa 15, Học kì I, 2005

Bài tập 5

Nộp ngày 4/12/05. Học viên không theo chuyên ngành Giải tích được miễn một bài.

Cho $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ là các không gian Banach.

1. Cho $1 < p < \infty$ và xét $S : \ell^p \to \ell^p$ với $S((x_1, x_2, \dots)) = (0, x_1, x_2, \dots)$.
a). Chứng tỏ $S \in \mathscr{B}(\ell^p)$. Tính S^*.
b). Chứng tỏ S có một không gian con bất biến không tầm thường.

2. Giả sử $T \in \mathscr{B}_0(\mathscr{X})$ và T có ánh xạ ngược. Chứng minh $\mathscr{X}$ là hữu hạn chiều.
Gợi ý: Chú ý là $TT^{-1} \in \mathscr{B}_0(\mathscr{X})$.

3. Giả sử $T \in \mathscr{B}_0(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ và $\operatorname{ran} T$ là tập đóng. Chứng minh rằng $\operatorname{ran} T$ là hữu hạn chiều.

4. Giả sử $T \in \mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ và $\mathscr{Y}$ là hữu hạn chiều. Chứng minh rằng $T \in \mathscr{B}_0(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.

5. Cho $\mathscr{X} = C[0,1], \|.\|_\infty)$ và $K \in C([0,1] \times [0,1])$. Xét toán tử tích phân T với nhân (kernel) K định nghĩa như sau. Với $f \in C[0,1])$, đặt

$$T(f) := \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy.$$

Chứng minh rằng $T \in \mathscr{B}_0(\mathscr{X})$.
Gợi ý: Dùng định lí Arzelà-Ascoli. Chú ý K là liên tục đều.