Giải tích Hàm Nâng cao
Cao học khóa 15, Học kì I, 2005

Bài thi cuối khóa và lời giải tóm tắt

Thời gian: 180 phút. Cho phép sử dụng tài liệu. Chỉ ba bài đầu tiên trong bài làm của học viên sẽ được chấm điểm. Học viên có thể sử dụng các kết quả trong các bài giảng và bài tập trong khóa học.

Với $1 \le p < \infty$, đặt $\ell^p = \{\{x_n\} : x_n \in \mathbb{F}, \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty\}$ với chuẩn $\|\{x_n\}\| = (\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{1/p}$. Đặt $\ell^\infty = \{\{x_n\} : x_n \in \mathbb{F}, \sup_{n\ge 1}|x_n| < \infty\}$ với chuẩn $\|\{x_n\}\| = \sup_{n\ge 1}|x_n|$.

1. a). Cho $\mathscr{X}$ là một không gian véctơ tôpô và $A \subset \mathscr{X}$. Chứng minh rằng nếu $A + A \subset 2\overline{A}$ thì tập $\overline{A}$ là lồi.

b). Chứng tỏ rằng trên $\mathscr{X}$ tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục không tầm thường khi và chỉ khi $\mathscr{X}$ chứa một tập mở lồi không tầm thường.

Lời giải: a). Ta có $\forall x, y \in A$, $x/2 + y/2 \in \overline{A}$. Suy ra $\forall x, y \in \overline{A}$, $x/2 + y/2 \in \overline{A}$. Dùng bài 6 của Bài tập 1.

b). Nếu f là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathscr{X}$ khác 0 thì $|f|$ là một nửa chuẩn liên tục khác 0, do đó tập $\{x \in \mathscr{X} : |f(x)| < 1\}$ là một tập lồi mở khác $\emptyset$ và $\mathscr{X}$.

Nếu trên $\mathscr{X}$ có một tập lồi mở $A \ne \emptyset$, $\mathscr{X}$ thì có $b \in \mathscr{X} \setminus A$. Theo định lí Hahn-Banach tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathscr{X}$, tách $\{b\}$ và A, nên khác 0.

2. a). Đặt $c_0 = \{\{x_n\} : x_n \in \mathbb{F}, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ với chuẩn $\|\{x_n\}\| = \sup_{n\ge 1}|x_n|$. Chứng minh rằng quả cầu đơn vị đóng trong c_0 không có điểm mút. b). Chứng minh rằng tập hợp các điểm mút của quả cầu đơn vị đóng trong ℓ^∞ là $\{\{x_n\} : \forall n, |x_n| = 1\}$.

Lời giải: a). Điểm mút nếu có phải nằm trên mặt cầu đơn vị. Giả sử $x = (x_1, x_2, \dots) \in c_0$ và $\|x\| = 1$. Vì $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ nên tồn tại n_0 sao cho $|x_{n_0}| < 1$. Tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $|x_{n_0} \pm \epsilon| < |x_{n_0}| + \epsilon < 1$. Đặt y là dãy nhận được từ x bằng cách thay x_{n_0} bởi $x_{n_0} - \epsilon$, và đặt z là dãy nhận được từ x bằng cách thay x_{n_0} bởi $x_{n_0} + \epsilon$. Khi đó y, z nằm trong quả cầu đơn vị và $(y+z)/2 = x$, vậy x không phải là một điểm mút.

b). Giả sử $x \in \ell^\infty$ và $\forall n$, $|x_n| = 1$. Giả sử có $\alpha \in [0,1]$ và y, z trong quả cầu đơn vị sao cho $x = \alpha y + (1-\alpha)z$. Khi đó với mọi n thì $x_n = \alpha y_n + (1-\alpha)z_n$. Mà $|x_n| = 1$, $|y_n| \le 1$, $|z_n| \le 1$, nên $y_n = z_n = x_n$. Vậy x là một điểm mút.

Giả sử $\|x\| \le 1$ và $\exists n_0$ sao cho $|x_{n_0}| < 1$. Tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $|x_{n_0} \pm \epsilon| < |x_{n_0}| + \epsilon < 1$. Đặt y là dãy nhận được từ x bằng cách thay x_{n_0} bởi $x_{n_0} - \epsilon$, và đặt z

là dãy nhận được từ x bằng cách thay x_{n_0} bởi $x_{n_0}+\epsilon$. Khi đó y, z nằm trong quả cầu đơn vị và $(y+z)/2 = x$, vậy x không phải là một điểm mút.

3. Chứng minh rằng mỗi phiếm hàm tuyến tính liên tục trên một tập compắc lồi của một không gian lồi địa phương thực nhận được cực đại tại một điểm mút của tập đó.

Lời giải: Một ánh xạ liên tục trên một tập compắc có giá trị lớn nhất trên đó. Tập hợp các điểm tại đó phiếm hàm tuyến tính đạt giá trị lớn nhất là một tập mút. Tập này lại chứa một điểm mút, theo định lí Krein-Milman.

4. Xét $T : \ell^2 \to \ell^2$ cho bởi

$$T((x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2^2}x_3, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}x_n, \dots).$$

a). Chứng minh rằng $T \in \mathscr{B}(\ell^2)$.

b). Xét $T_n : \ell^2 \to \ell^2$ cho bởi

$$T_n((x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2^2}x_3, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}x_n, 0, 0, \dots).$$

Chứng minh rằng $T_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$ trong $\mathscr{B}(\ell^2)$. Từ đó suy ra T là toán tử compắc.

Lời giải: a). $\forall x \in \ell^2$, $\|T(x)\|^2 = \sum_n |\frac{1}{2^{n-1}}x_n|^2 \le \sum_n |x_n|^2 = \|x\|^2$, vậy T bị chặn.

b). Giả sử $x \in \ell^2$ sao cho $\|x\| = (\sum_n |x_n|)^{1/2} \le 1$ và do đó $|x_n| \le 1, \forall n$. Khi đó $\|(T-T_n)(x)\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\frac{1}{2^{i-1}}x_i|^2 \le \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$. Suy ra $\|T - T_n\| \le \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ 0.

Mỗi T_n là một toán tử tuyến tính vào một không gian hữu hạn chiều nên là toán tử compắc (bài 4 của Bài tập 5). Giới hạn của một dãy các toán tử compắc là compắc (lý thuyết: $\mathscr{B}_0(\mathscr{X})$ là đóng trong $\mathscr{B}(\mathscr{X})$), vậy T là compắc.

5. Xét dãy $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ trong đó số 1 nằm ở vị trí thứ n trong dãy. Lưu ý là $e_n \in \ell^p$, $1 \le p < \infty$; và $(\ell^p)^* = \ell^q$ trong đó q là số sao cho $1/p + 1/q = 1$.

a). Chứng minh rằng dãy $\{e_n\}$ không hội tụ về 0 trong ℓ^p.

b). Chứng minh rằng dãy $\{e_n\}$ hội tụ yếu về 0 trong ℓ^p nếu $1 < p < \infty$.

c). Chứng minh rằng dãy $\{e_n\}$ không hội tụ yếu về 0 trong ℓ^p nếu $p = 1$.

Lời giải: a). $\|e_n - 0\| = \|e_n\| = 1, \forall n$.

b). $\{e_n\}$ hội tụ yếu về 0 trong ℓ^p khi và chỉ khi $\langle x, e_n\rangle \to 0, \forall x \in (\ell^p)^* = \ell^q$. Chú ý là nếu $x \in \ell^q$ và $y \in \ell^p$ thì $\langle x, y\rangle := \sum_n x_n \overline{y_n}$. Do đó $\langle x, e_n\rangle = x_n \to 0$, bởi vì nếu $1 < p < \infty$ thì $1 < q < \infty$ và $\sum_n |x_n|^q < \infty$.

c). Nếu $p = 1$ thì $q = \infty$ nên không có được $x_n \to 0$ với mọi $x \in \ell^\infty$.