

Nhập môn Tôpô
Học kì II, 2005–2006

Bài thi

Nộp ngày 16/6/06.

1. Xây dựng công thức Gauss-Ostrogradski từ công thức Stokes tổng quát. Cho $\vec{F} = (f, g, h)$ là một trường vectơ trơn trên miền $\Omega \in \mathbb{R}^3$ compact với biên trơn, \vec{n} là vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài của $\partial\Omega$, thì

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dx dy dz = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA$$

2. a). Chứng minh rằng trên S^2 không tồn tại một trường vectơ luôn luôn khác không.

b). Chứng tỏ rằng trên S^3 tồn tại một trường vectơ luôn luôn khác không.

Cho X là một đa tạp và $c : [a, b] \rightarrow X$ là một đường cong trơn. Với một 1-dạng w trên X đặt

$$\int_c w := \int_a^b c^* w.$$

3. Chứng minh rằng nếu w là đúng, $w = df$ trong đó f là một hàm trơn trên X , và $f(a) = p$, $f(b) = q$ thì

$$\int_c w = f(q) - f(p).$$

4. Chứng minh rằng $\int_c w$ không thay đổi nếu thay bằng một tham số hóa bảo toàn định hướng khác của c .

Gợi ý: Giả sử $f : [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$ là một vi đồng phôi sao cho $f(a_1) = f(a)$ và $f(b_1) = f(b)$ thì $c \circ f$ là một tham số hóa khác của c , bảo toàn định hướng. Dùng công thức đổi biến.

5. Giả sử nếu w là một 1-dạng đúng thì $\int_{\gamma} \omega = 0$ với mọi đường cong đóng γ trong X .

6. Chứng minh mỗi thành phần liên thông của một đa tạp là liên thông đường.

Gợi ý: Một đa tạp là một tập liên thông đường địa phương. Cho x là một điểm trên đa tạp, xét tập hợp A các điểm y của đa tạp mà có một đường đi từ x đến y . Chứng minh rằng A vừa đóng vừa mở.

7. Chứng minh rằng nếu $\int_{\gamma} \omega = 0$ với mọi đường cong đóng γ trong X thì $\int_c \omega$ chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của c .

8. Chứng minh rằng nếu $\int_{\gamma} \omega = 0$ với mọi đường cong đóng γ trong X thì ω là dạng vi phân đúng.

Gợi ý: Chọn $p \in X$ ở cùng thành phần liên thông với x và đặt $f(x) = \int_p^x \omega$. Chứng tỏ $df = \omega$ bằng cách xét một lân cận được tham số hóa U của x và lấy thêm p' thuộc lân cận này, viết $\int_p^x \omega = \int_p^{p'} \omega + \int_{p'}^x \omega$ và tính toán trên U , thay c bằng một đường gấp khúc.