

Tôpô
Học kì II, 2005–2006

Đề thi

Thời gian: 180 phút.

Mỗi bài giải đúng được 2 điểm. Nếu giải nhiều hơn 5 bài thì chỉ 5 bài có điểm cao nhất sẽ được tính điểm.

1. Chứng minh rằng nếu $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là liên tục thì ảnh của f là một khoảng đóng.

2. Chứng minh rằng $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ là đồng phôi với $S^1 \times \mathbb{R}$.

Gợi ý: \mathbb{R} đồng phôi với $(0, \infty)$.

3. Cho $\{A_n\}$, $n \geq 1$ là một họ các tập liên thông trong không gian tôpô X sao cho $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ là liên thông.

4. a). Chứng tỏ rằng nếu $f : X \rightarrow Y$ là một đồng phôi và $Z \subset X$ thì $X \setminus Z$ và $Y \setminus f(Z)$ vẫn đồng phôi.

b). Chứng tỏ rằng các không gian $[0, 1]$, $[0, \infty)$, \mathbb{R} và S^1 là đôi một không đồng phôi.

Gợi ý: Dùng a) với Z chỉ chứa một điểm. Dùng tính liên thông.

c). Chứng minh rằng không gian $[0, 1]$ và $[0, 1] \times [0, 1]$ là không đồng phôi.

5. a). Chứng minh rằng một không gian chính tắc liên thông mà có nhiều hơn một phần tử thì phải vô hạn.

b). Chứng minh rằng mệnh đề trên vẫn đúng nếu thay không gian chính tắc bằng không gian Hausdorff.

6. a). Chứng minh rằng compact hóa một điểm là duy nhất. Cụ thể như sau. Giả sử X là một không gian Hausdorff compact địa phương và $X^\infty = X \cup \{a\}$ là compact hóa Alexandroff của X . Giả sử $Y = X \cup \{a\}$ là một không gian Hausdorff compact và $f : X \rightarrow X \subset Y$ là một đồng phôi. Chứng minh rằng X^∞ và Y là đồng phôi.

Gợi ý: Định nghĩa ánh xạ h sao cho sơ đồ sau là giao hoán, sau đó chứng minh rằng h là song ánh liên tục.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & X^\infty \\ & \searrow f & \downarrow h \\ & & Y \end{array}$$

b). Chứng minh rằng compact hóa Alexandroff của \mathbb{R} là S^1 .

Gợi ý: Chứng minh rằng $S^1 \setminus \{(0, 1)\}$ đồng phôi với \mathbb{R} . Dùng câu a).

c). Tìm compact hóa một điểm của không gian $(0, 1) \cup (2, 3) \subset \mathbb{R}$.

7. a). Chứng minh rằng tôpô tích trên $X \times Y$ là tôpô thô nhất sau cho các ánh xạ chiếu $pr_X : X \times Y \rightarrow X$ and $pr_Y : X \times Y \rightarrow Y$ là liên tục.

b). Chứng minh rằng nếu X và Y là liên thông thì $X \times Y$ cũng liên thông.

8. a). Đặt $X = [0, 1] \times [0, 1] / \sim$ trong đó $(0, t) \sim (1, t)$ với mọi $0 \leq t \leq 1$, tức là hình vuông với một cặp cạnh đối diện được đồng nhất. Chứng minh rằng X là đồng phôi với mặt trụ $[0, 1] \times S^1$.

Gợi ý: Xây dựng một toàn ánh liên tục thích hợp từ $[0, 1] \times [0, 1]$ vào $[0, 1] \times S^1$ sao cho sau khi thực hiện đồng nhất nó trở thành đơn ánh.

b). Đặt $X = [0, 1] \times [0, 1] / \sim$ trong đó $(s, 0) \sim (s, 1)$ và $(0, t) \sim (1, t)$ với mọi $0 \leq s, t \leq 1$, tức là hình vuông với hai cặp cạnh đối diện được đồng nhất. Chứng minh rằng X là đồng phôi với mặt xuyên $S^1 \times S^1$.