NGUYỄN VIẾT ĐÔNG – TRẦN HUYÊN
NGUYỄN VĂN THÌN

***

BÀI TẬP
ĐẠI SỐ ĐỒNG ĐIỀU

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH - 2003**

LỜI NÓI ĐẦU

Môn học ***Đại số đồng điều*** thuộc chương trình đào tạo cử nhân và thạc sỹ chuyên ngành Toán – Tin học. Để phục vụ việc giảng dạy , học tập môn học này chúng tôi đã biên soạn cuốn *Đại số đồng điều* và được xuất bản bởi Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh.Trong giáo trình đó chúng tôi đã chọn lọc một số lượng khá nhiều bài tập, đặc biệt có những bài tập nhằm bổ sung những kiến thức lý thuyết cần thiết. Do khuôn khổ cuả cuốn sách nên tất cả các bài tập đó đều chưa có lời giải hoặc hướng dẫn. Vì vậy chúng tôi tiếp tục biên soạn cuốn cách này nhằm bổ sung cho giáo trình đã có để giúp bạn đọc được dễ dàng hơn trong việc tham khảo môn học này.

Sách ***Bài tập Đại số đồng điều*** gồm bốn chương tương ứng với bốn chương trong giáo trình ***Đại số đồng điều***. Ngoài các bài tập đã được cho ở cuối mỗi chương trong cuốn sách này chúng tôi có đưa thêm vào một số bài tập mới. Cuối cuốn sách là phần giải và hướng dẫn các bài tập trong sách. Các bài tập được tuyển chọn công phu sẽ giúp bạn đọc nắm lý thuyết tốt hơn, biết vận dụng các kiến thức trong giáo trình vào các tình huống khác nhau trong việc giải các bài tập và có tầm nhìn sâu hơn về cái đẹp của môn ***Đại số đồng điều***. Ngoài ra, các sinh viên ngành toán đại số cũng có thể tham khảo cuốn sách này để hiểu rõ hơn về lý thuyết mô đun trong đại số.

Mặc dù các tác giả đã có nhiều cố gắng nhưng chắc cuốn sách khó tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các đồng nghiệp cũng như các bạn đọc.

Chúng tôi rất cám ơn Nhà xuất bản Đại Học Quốc Gia Thành Phố Hồ Chí Minh đã tạo điều kiện thuận lợi để cuốn sách được xuất bản.

Thành Phố Hồ Chí Minh ngày 31/5/2003.

CÁC TÁC GIẢ

CÁC KÝ HIỆU TRONG SÁCH

$\mathbb{N}$: Tập hợp các số tự nhiên

$\mathbb{Z}$: Tập hợp các số nguyên

$\mathbb{Q}$: Tập hợp các số hữu tỉ

$\mathbb{R}$: Tập hợp các số thực

X/A : Mô đun thương X trên A

$\mathbb{Z}_k$: $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$

$X \cong Y$: X đẳng cấu với Y

$X \otimes Y$: Tích ten xơ của X và Y

$X \oplus Y$: Tổng trực tiếp của X và Y

$X \times Y$: Tích Descartes của X và Y

$\sum_{i \in I} X_i$: Tổng trực tiếp của họ $\{X\}_{i\in I}$

$\prod_{i \in I} X_i$: Tích trực tiếp của họ $\{X\}_{i\in I}$

$A + B$: $\{ a + b : a \in A, b \in B\}$

$A \lhd X$: A là mô đun con của X.

Hom(A, B) : Tập các đồng cấu từ A vào B

$< S >$: Mô đun con sinh bởi tập S

Ker f : Nhân của đồng cấu f

Imf : Ảnh của đồng cấu f

PHẦN I

TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ CÁC ĐỀ TOÁN

CHƯƠNG I

PHẠM TRÙ MÔ ĐUN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. MÔ ĐUN

1.1 Khái niệm chung

♦ Cho R là vành có đơn vị, nhóm cộng (X, +) được gọi là *mô đun trái* trên vành R nếu có ánh xạ $\mu : R \times X \to X$ mà cái hợp thành $\mu(r, x)$ ký hiệu là rx thoả mãn các tiên đề sau :

M_1 : $1.x = x \quad \forall x \in X$

M_2 : $(rs)x = r(s\,x) \quad \forall r,s \in R, \forall x \in X$

M_3 : $r(x + y) = rx + ry \quad \forall r \in R, \forall x,y \in X$

M_4 : $(r + s)x = rx + sx \quad \forall r,s \in R, \forall x \in X$

♦ Cho A, B là các tập con khác rỗng của mô đun X, $\phi \neq K \subseteq R$. Ta định nghĩa

$A + B = \{a + b : a\in A, b\in B\}$

$K.A = \{ra : \in r\in K, a\in A\}$

- Tập con A khác rỗng của mô đun X được gọi là mô đun con của mô đun X nếu $A + A \subseteq A$ và $RA \subseteq A$.

- Cho M là tập con của R - mô đun X. Giao tất cả các mô đun con của X chứa M được gọi là *mô đun con của X sinh bởi tập M*. Nói cách khác mô đun con của mô đun X sinh bởi tập M chính là tập hợp tất cả R - tổ hợp tuyến tính của M.

- Cho X là R - mô đun và A là mô đun con của X. Nhóm thương X/A trở thành R - mô đun với phép nhân ngoài

$$r(x + A) = rx + A \quad \forall r\in R, \forall (x + A)\in X/A$$

Ta gọi X/A là *mô đun thương* của mô đun X theo mô đun A.

1.2 Các tính chất

- $\forall r,s \in R, \forall x,y \in X$

  i) $0.r = 0$ và $r.0 = 0$

  ii) $(-r) x = -rx = r(-x)$

  iii) $(r - s)x = rx - sx$

  iv) $r(x - y) = rx - ry$

- Nếu A, B là hai mô đun con của mô đun X thì A + B là mô đun con của X.

2. ĐỒNG CẤU

2.1. Khái niệm chung

• Ánh xạ f từ R - mô đun X vào R - mô đun Y gọi là R-đồng cấu nếu $\forall x,y \in X$, $\forall r \in R$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ và $f(rx) = rf(x)$.

• Đồng cấu $f : X \rightarrow Y$ được gọi là đơn cấu (tương ứng toàn cấu, đẳng cấu) nếu f là đơn ánh (tương ứng toàn ánh , song ánh).

2.2. Các tính chất

• Cho A   X, B   Y và đồng cấu $f : X \rightarrow Y$. Khi đó, f(A) là mô đun con của Y và $f^{-1}(B)$ là mô đun con của X. Ta ký hiệu Kerf := $f^{-1}(0)$ và Imf := f(X).

• Tích của hai đồng cấu (đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu) là đồng cấu (đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu). Hơn nữa, f là R - đơn cấu nếu và chỉ nếu Kerf = 0 và f là đẳng cấu nếu và chỉ nếu f^{-1} là đẳng cấu.

* **Định lý Noether** : *Cho toàn cấu $f : X \rightarrow Y$, khi đó tồn tại duy nhất đẳng cấu $f' : X/Kerf \rightarrow Y$ sao cho $f = f'p$, với ánh xạ tự nhiên $p : X \rightarrow X/kerf$.*

2.3. Phạm trù mô đun

Một phạm trù $\mathscr{P}$ bao gồm một lớp các vật : A, B, C, D . . . có các tính chất sau :

•Với mọi cặp vật có thứ tự (A, B) xác định được tập Mor(A, B) các cấu xạ có nguồn là A và đích là B, mà nếu $(A, B) \neq (C, D)$

thì Mor(A, B) $\cap$ Mor(C, D) = $\emptyset$. Hơn nữa với bất kỳ bộ ba có thứ tự (A, B, C), nếu cặp cấu xạ $(\alpha, \beta) \in$ Mor(A, B) $\times$ Mor(B, C) thì tích $\beta\alpha \in$ Mor(A, C).

- PT1: Với mỗi vật $A \in \mathscr{P}$, tồn tại cấu xạ đồng nhất $1_A \in$ Mor(A, A), thoả $1_A.\alpha = \alpha$ và $\beta.1_A = \beta$, nếu các tích $1_A\alpha$, $\beta.1_A$ xác định.

- PT2: Luật lấy tích các cấu xạcó tính chất kết hợp, tức nếu có tích $\alpha(\beta\gamma)$ thì cũng có tích $(\alpha\beta)\gamma$ và $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Lớp các R-đồng cấu lập thành một phạm trù mô đun.

3. TỔNG TRỰC TIẾP VÀ TÍCH TRỰC TIẾP

3.1 .Các khái niệm chung

- Giả sử $\{X_i\}_{i\in I}$ là họ các R - mô đun, trong tích Descartes $\prod_{i\in I} X_i$ ta định nghĩa các phép toán : $(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I}$ và $r(x_i)_{i\in I} = (rx_i)_{i\in I}$. Khi đó, $\prod_{i\in I} X_i$ với hai phép toán trên trở thành R - mô đun và gọi là *tích trực tiếp* của họ mô đun $\{X_i\}_{i\in I}$.

- Mô đun con $\sum_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$: hữu hạn $x_i \neq 0\}$ gọi là *tổng trực tiếp* của họ mô đun $\{X_i\}_{i\in I}$.

- Giả sử $\{X_i\}_{i\in I}$ là họ các mô đun con của mô đun X. Nếu $\sum_{i \in I} X_i = X$ và $\sum_{i \neq j} X_j \cap X_i = 0$ với mọi $i\in I$, ta gọi X là *tổng trực tiếp trong* của họ $\{X_i\}_{i\in I}$.

3.2 .Các tính chất tổng trực tiếp và tích trực tiếp

• Nếu lực lượng chỉ số I hữu hạn thì tổng trực tiếp trùng với tích trực tiếp.

• Nếu tồn tại các đồng cấu $f : X \to Y$, $g : Y \to K$ sao cho gf là đẳng cấu. Khi đó $Y \cong \text{Im}f \oplus \text{Ker}g$.

• Mô đun X là tổng trực tiếp trong của hai mô đun con A và B khi và chỉ khi với mỗi $x \in X$ có và chỉ có một cách biểu diễn $x = a + b$ với $a \in A$, $b \in B$.

* **Định lý của tổng trực tiếp qua nhúng và chiếu** : *Cho các mô đun* A, B, C.*Nếu tồn tại các đồng cấu* $j_1 : A \to C$, $j_2 : B \to C$, $p_1 : C \to A$ *và* $p_2 : C \to A$ *thoả*

1) $p_1j_1 = 1_A$, $p_2j_2 = 1_B$.

2)$p_1j_2 = 0$. $p_2j_1 = 0$.

3) $j_1p_1 + j_2p_2 = 1_C$.

thì $C \cong A \oplus B$.

* **Định lý tính phổ dụng của tích trực tiếp** *: Cho họcác mô đun* $\{X_i\}_{i\in I}$*, khi đó mỗi họ đồng cấu* $\{f_i : X \to X_i\}$ *tồn tại duy nhất một đồng cấu* $f : X \to \prod X_i$ *sao cho* $f_i = p_if$ *với mọi* $i \in I$.*Hơn nữa, nếu có họ đồng cấu* $\{f_i : X_i \to Y_i\}$ *thì tồn tại duy nhất đồng cấu tích trực tiếp* $\prod f_i : \prod X_i \to \prod Y_i$ *sao cho với mọi* $(x_i)_{i\in I} \in \prod X_i$ *ta có* $\prod f_i[(x_i)_{i\in I}] = (f_i[x_i])_{i\in I}$.

* **Định lý tính phổ dụng của tổng trực tiếp** *: Cho họ các mô đun* $\{X_i\}_{i\in I}$. *Khi đó với bất kỳ mô đun X, nếu có họ các đồng cấu* $\{f_i : X_i \to X\}$ *thì tồn tại duy nhất một đồng cấu* $f : \oplus X_i \to X$ *sao cho* $f_i = fj_i$ *với mọi* $i \in I$. *Hơn nữa, nếu có họ đồng cấu*

$\{f_i : X_i \to Y_i\}$ *thì tồn tại duy nhất đồng cấu tổng trực tiếp* $\oplus f : \oplus X_i \to \oplus Y_i$ *sao cho* $\forall x := \sum j_i^X(x_i) \in \oplus X_i$, $f(x) = (f_i[x_i])$.

3.3 .Vật phổ dụng trong phạm trù

Cho trước phạm trù $\mathscr{P}$. Vật A$\in \mathscr{P}$ được gọi làvật đầu (vật cuối) nếu với bất kỳ vật X $\in \mathscr{P}$ tập Mor(A, X) (t.ư Mor(B, X)) có đúng một phần tử. Khi đóvật A được gọi là vật phổ dụng của phạm trù. Nếu trong phạm trù $\mathscr{P}$ có các vật đầu (vật cuối) thì các vật đầu (vật cuối) là tương đương nghĩa là tồn tại đẳng xạ giữa chúng với nhau.

4. DÃY KHỚP

4.1. Các khái niệm chung

Dãy các đồng cấu (vô hạn hay hữu hạn)

$$\ldots \xleftarrow{\partial_{n-1}} X_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} X_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} X_{n+1} \leftarrow X_{n+2} \leftarrow \ldots \quad (1)$$

gọi là khớp tại mô đun X_n nếu Im∂_{n-1} = Ker∂_n và chẻ tại mô đun X_n nếu Im∂_{n+1} là hạng tử trực tiếp của mô đun X_n. Dãy (1) gọi là khớp (chẻ), nếu nó khớp (chẻ) tại mọi mô đun trung gian.

4.2. Các tính chất chung

*** Định lý về dãy khớp ngắn** *: Đối với dãy khớp ngắn*

$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$. *Các phát biểu sau là tương đương:*

i) Dãy chẻ ra.

ii) Đồng cấu f có nghịch đảo trái.

iii) Đồng cấu g có nghịch đảo phải.

∗ **Bổ đề bốn đồng cấu** : *Cho biều đồ giao hoán*

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ \tau\downarrow & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' \end{array}$$

Trong đó hai dòng là khớp, τ là toàn cấu và γ là đơn cấu. Khi đó

i) $\mathrm{Ker}\beta = g(\mathrm{Ker}\alpha)$

ii) $\mathrm{Im}\alpha = g'^{-1}(\mathrm{Im}\beta)$.

∗ **Bổ đề năm đồng cấu** : *Cho biểu đồ giao hoán*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \alpha_1\downarrow & & \alpha_2\downarrow & & \alpha_3\downarrow & & \alpha_4\downarrow & & \alpha_5\downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

Trong đó hai dòng là khớp, α_1 toàn cấu và α_5 đơn cấu. Khi đó, nếu α_2 và α_4 đơn cấu (toàn cấu, đẳng cấu) thì α_3 đơn cấu (toàn cấu, đẳng cấu)

∗ **Bổ đề năm ngắn** : *Cho biểu đồ giao hoán*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Trong đó các dòng là khớp. Khi đó, nếu α, γ là đơn cấu (toàn cấu, đẳng cấu) thì β cũng là đơn cấu (toàn cấu, đẳng cấu).

5. MÔ ĐUN TỰ DO

5.1. Khái niệm chung.

• Cho mô đun X, tập con $S \subseteq X$ được gọi là hệ sinh của X nếu $< S > = X$.

• Tập con $S \subseteq X$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu từ mỗi đẳng thức $\sum_{i=1}^{n} r_i s_i = 0$, ta có $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$ ở đây $r_i \in R$, $s_i \in S$.

• Hệ sinh S của mô đun X đồng thời độc lập tuyến tính gọi là cơ sở của mô đun X. Mô đun X có cơ sở được gọi là mô đun tự do.

4.2. Các tính chất

• Tập $S = \{s_i\}_{i \in I} \subseteq X$ các phần tử của mô đun X là cơ sở của X nếu và chỉ mỗi phần tử $x \in X$ chỉ có một cách biễu thị tuyến tính qua S.

• Nếu $f : X \to Y$ là đẳng cấu mô đun và X là mô đun tự do thì Y là mô đun tự do. Hơn nữa, nếu S là cơ sở của X thì f(S) là cơ sở của Y.

• Mô đun X là tự do nếu và chỉ nếu X đẳng cấu mô đun với tổng trực tiếp của họ các bản sao của vành hệ tử.

• Tổng trực tiếp của một họ mô đun tự do là mô đun tự do.

• Mọi mô đun đều đẳng cấu với mô đun thương của một mô đun tự do nào đó.

* **Định lý tính phổ dụng của mô đun tự do** : *Tập* $\varnothing \neq S \subseteq X$ *là cơ sở của mô đun* X *nếu và chỉ nếu với bất kỳ mô đun* Y, *mỗi ánh xạ* $f : S \to Y$ *tồn tại duy nhất đồng cấu* $\overline{f} : X \to Y$ *sao cho* $\overline{f}$ *thu hẹp trên* S *trùng với* f.

* **Định lý mô đun tự do trên vành chính** : *Mô đun con của mô đun tự do trên vành chính là mô đun tự do.*

B. BÀI TẬP

1.1. Cho R là vành có đơn vị 1, X là nhóm cộng giao hoán và Hom (X, X) là vành các tự đồng cấu của nhóm X. Chứng minh rằng X là R - mô đun trái khi và chỉ khi tồn tại một đồng cấu vành $\varphi : R \to \text{Hom}(X, X)$ sao cho $\varphi(1) = 1_X$, với 1_X là đồng cấu đồng nhất của nhóm X.

1.2. Chứng minh rằng trong tám tiên đề định nghĩa R -mô đun trái, gồm bốn tiên đề về nhóm cộng giao hoán và bốn tiên đề M_1 – M_4, ta có thể bỏ đi tiên đề giao hoán của phép cộng. Nói cách khác, tiên đề đó được suy ra bởi bảy tiên đề còn lại.

1.3. Cho X là R-mô đun và K là iđeal hai phíacủa R. Chứng minh rằng với $x \in X$ thì $K.x = \{rx : r \in K\}$ là mô đun con của X.

1.4. Cho R là miền nguyên và X là R-mô đun, phần tử $x \in X$ được gọi là phần tử xoắn nếu tồn tại $\lambda \in X$, $\lambda \neq 0$ mà $\lambda x = 0$. Đặt $\tau(X)$ là tập tất cả các phần tử xoắn của X.

Chứng minh rằng :

a) $\tau(X)$ là mô đun con của X.

b) Nếu $\tau(X) = X$, ta nói X là mô đun xoắn. Chứng minh rằng mọi mô đun con của mô đun xoắn là mô đun xoắn.

c) Nếu $\tau(X) = 0$ thì ta nói X là mô đun không xoắn. Chứng minh rằng mọi mô đun con của mô đun không xoắn là mô đun không xoắn.

d) Mô đun thương $X/\tau(X)$ có là mô đun không xoắn hay không?

e) $\mathbb{Z}$ -mô đun $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ có là mô đun xoắn hay không ?

1.5. Cho R là miền nguyên và X là R- mô đun. Phần tử $x \in X$ được gọi là chia được nếu mọi $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$, tồn tại phần tử $y \in X$ sao cho $x = \lambda y$. Đặt $\delta(X)$ là tập tất cả các phần tử chia được của X. Nếu $\delta(X) = X$ thì X được gọi là mô đun chia được. Chứng minh rằng

a) $\delta(X)$ là mô đun con của X.

b) Mô con thương của một mô đun chia được là mô đun chia được.

c) $\mathbb{Z}$-mô đun $\mathbb{Q}$ và $\mathbb{Z}$-mô đun $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ đều là các mô đun chia được.

1.6. Chứng minh rằng mỗi đồng cấu $f : X \to Y$ là duy nhất xác định bởi giá trị của f trên hệ sinh S nào đó của X.

Tuy nhiên không phải mỗi ánh xạ $g : S \to Y$ nào cũng có thể mở rộng thành đồng cấu từ X vào Y. Hãy tìm điều kiện cho g để g có thể mở rộng thành đồng cấu trên X.

1.7. Cho $f, g : X \to Y$ là các đồng cấu từ cùng mô đun X vào mô đun Y. Gọi $A \subseteq X$ là tập các $x \in X$ mà $f(x) = g(x)$. Chứng minh rằng A là mô đun con của X.

1.8. Mô đun X gọi là mô đun đơn nếu X chỉ có hai mô đun con duy nhất là 0 và chính X. Giả sử X là mô đun đơn và $f : X \to Y$ là đồng cấu mô đun. Chứng minh rằng :

a) Imf là mô đun con đơn của Y.

b) Nếu $\text{Imf} \neq 0$ thì f là đơn cấu.

1.9. Cho A, B là các R-mô đun con của mô đun X. Chứng minh rằng

$$(A + B)/A \cong B/(A \cap B)$$

1.10. Cho mô đun X và các mô đun con M, N mà $N \subseteq M$. Chứng minh rằng

$$(X/N)/(M/N) \cong X/M$$

1.11. Cho $h : X \to X$ là tự đồng cấu của mô đun X thoả $hh = h$. Hãy chứng minh

$$X = \text{Imh} \oplus \text{Kerh}$$

1.12. Chứng minh rằng trong ba đặc trưng (1), (2), (3) của tổng trực tiếp hai mô đun (được nói trong định lý *tổng trực tiếp qua nhúng và chiếu*), ta có thể bỏ đi đẳng thức (2). Nói cách khác, nếu ba mô đun A, B, C nói trong định lý *tổng trực tiếp qua nhúng và chiếu* chỉ cần thoả haiđẳng thức (1), (3) thì

$$C \cong A \oplus B.$$

1.13. Cho X là tổng trực tiếp của họ các mô đun $\{X_i\}_{i\in I}$. Chứng minh rằng

a) $\tau(X) = \sum_{i\in I} \tau(X_i)$. Từ đó suy ra

b) Tổng trực tiếp các mô đun xoắn là mô đun xoắn .

c) Tổng trực tiếp của các mô đun không xoắn là mô đun không xoắn.

1.14. Cho $X = \prod_{i\in I} X_i$. Chứng minh rằng mô đun con chia được của mô đun X :

$$\delta(X) = \prod_{i\in I} \delta(X_i)$$

Từ đó suy ra tích trực tiếp của các mô đun chia được là mô đun chia được.

Tổng trực tiếp của các mô đun chia được có là mô đun chia được hay không ?

1.15. Mô đun X được gọi là hữu hạn sinh nếu trong X có một tập sinh hữu hạn. Cho X là tổng trục tiếp của họ mô đun $\{X_i\}_{i\in I}$. Chứng minh rằng

a) Mô đun thương của mô đun hữu hạn sinh là mô đun hữu hạn sinh.

b) Mô đun tổng trực tiếp X là hữu hạn sinh khi và chỉ khi mỗi X_i là mô đun hữu hạn sinh và hầu hết các $X_i = 0$, trừ một số hữu hạn.

1.16. Chứng minh rằng tổng trực tiếp của họ các đơn cấu (toàn cấu, đẳng cấu) là đơn cấu (toàn cấu, đẳng cấu). Kết luận trên có đúng cho tích trưc tiếp hay không ?.

1.17. Cho biểu đồ các đồng cấu

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & C \arrow[r] \arrow[dl, "\varphi"] & 0 \\ & X & & \end{tikzcd}$$

Trong đó dòng là khớp và hf = 0. Hãy chứng minh rằng tồn tại và duy nhất đồng cấu $\varphi : C \rightarrow X$ sao cho $h = \varphi g$.

1.18. Cho biểu đồ các đồng cấu

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[d, "h"] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Trong đó dòng là khớp, $gh = 0$. Hãy chứng minh rằng : tồn tại và duy nhất đồng cấu $\psi : X \to A$, thoả $f\psi = h$.

1.19. Cho dãy khớp ngắn

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

Trong đó A, C là các mô đun hữu hạn sinh . Chứng minh rằng X cũng là mô đun hữu hạn sinh.

1.20. Cho X là R-mô đun và X_1, X_2 là các mô đun con của X mà $X_1 + X_2$ và $X_1 \cap X_2$ là các mô đun con hữu hạn sinh. Chứng minh rằng X_1, X_2 là các mô đun con hữu hạn sinh.

1.21. Cho biểu đồ

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & \\
 & & Y \arrow[d, "\beta"'] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] & A \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"] & X' \\
 & & Y' &
\end{tikzcd}$$

Trong đó dòng và cột khớp. Chứng minh rằng $\beta'\alpha$ là đơn cấu khi và chỉ khi $\alpha'\beta$ là đơn cấu.

1.2 Cho biểu đồ trong đó dòng và cột là khớp. Chứng minh rằng $\beta'\alpha$ là toàn cấu khi và chỉ khi $\alpha'\beta$ là toàn cấu.

Xem biểu đồ ở trang sau.

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "\beta"] & & \\
X \arrow[r, "\alpha"] & A \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"] & X' \arrow[r] & 0 \\
 & Y' \arrow[d] & & \\
 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

1.23.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & B_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & B_3 \arrow[r] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Cho biểu đồ 3×3, trong đó ba cột và hai dòng liên tiếp là khớp. Chứng minh rằng dòng còn lại cũng khớp. Hơn nữa nếu dòng 1 và dòng 3 khớp nhưng dòng hai nửa khớp ta cũng có kết quả như trên.

1.24. Cho X_1, X_2 là các mô đun con của mô đun X. Chứng minh rằng dãy sau đây là khớp.

$$0 \longrightarrow X_2 \big/ X_1 \cap X_2 \xrightarrow{\varphi} X \big/ X_1 \xrightarrow{\psi} X \big/ X_1 + X_2 \longrightarrow 0$$

trong đó $\varphi\,(x + X_1 \cap X_2) = x + X_1$ với mọi $x \in X_2$ và $\psi(x + X_1) = x + (X_1 + X_2)$ với mọi $x \in X$.

1.25. Chứng minh rằng mô đun con A của mô đun con X là hạng tử trực tiếp của X nếu mô đun thương X/A là mô đun tự do.

1.26. Cho X, Y là các mô đun trên vành chính, hơn nữa Y là mô đun tự do. Chứng minh rằng : $X \cong \mathrm{Kerf} \oplus \mathrm{Imf}$, với mọi đồng cấu $f : X \to Y$.

1.27. Chứng minh rằng mọi mô đun tự do trên miền nguyên R là mô đun không xoắn.

Nếu X là mô đun không xoắn trên miền nguyên R thì có thể kết luận R là mô đun tự do hay không ?

C. BÀI TẬP BỔ SUNG

1.28. Cho M là R-mô đun tự do có tính chất, nếu $r \in R$ và $m \in M$ thoả $rm = 0$ thì ta có $m = 0$ hoặc $r = 0$.

Chứng minh rằng R không có ước của không.

1.29. Cho $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ là tập các R-mô đun và

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$$

Với mỗi $1 \leq i \leq n$, gỉa sử N_i là mô đun con của M_i. Chứng minh rằng

$$N_1 + N_2 + \ldots + N_n = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_n$$

1.30. Cho $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ là tập các R-mô đun và

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$$

Với mỗi $1 \leq i \leq n$, gọi π_i là phép chiếu từ M xuống M_i. Chứng minh rằng

$$\begin{cases} \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n = 1_M \\ \pi_i^2 = \pi_i \text{ với mọi } i \\ \pi_i\pi_j = 0 \text{ nếu } i \neq j \end{cases} \qquad (*)$$

Đảo lại cho M là R_mô đun và $\{\pi_i, \pi_2, \ldots, \pi_n\} \subseteq Hom_R(M, M)$ thoả điều kiện (*). Hãy chứng minh rằng

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$$

1.31. Cho M, M' các R-mô đun và $f \in Hom_R(M, M')$. Gọi N là mô đun con của Kerf. Chứng minh rằng f cảm sinh một R-đồng cấu f' từ M/N vào M', nghĩa là

$$f'(x + N) = f(x) \quad \text{với mọi } x \in M$$

1.32. Cho M, M' là các R-mô đun và N và N' là các mô đun con tương ứng của M và M'. Nếu ta có $M \cong M'$ và $N \cong N'$ thì có kết luận được $M/N \cong M'/N'$ hay không ?

1.33. Cho M, N là các R-mô đun. Giả sử có $f \in Hom_R(M, N)$ và $g \in Hom_R(N, M)$ thoả tính chất

i) $f(M) = N$.

ii) $fg = 1_N$.

Chứng minh rằng

$$M \cong N \oplus (M/g(N))$$

1.34. Cho $X_1, X_2, \ldots, X_n$ và $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ là các R-mô đun và

$$\varphi : \bigoplus_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{m} Y_j$$

là đồng cấu R-mô đun. Chứng minh rằng φ biểu diễn duy nhất qua ma trận

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \ldots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \ldots & \varphi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{m1} & \varphi_{m2} & \ldots & \varphi_{mn} \end{pmatrix}$$

Trong đó $\varphi_{ij} \in Hom_R(X_j, Y_i)$. Trong sự biễu diễn này nếu xem các phần tử $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \in \oplus X_i$ và $y \in \oplus Y_j$ như các véc tơ cột, Hãy chứng minh rằng

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \ldots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \ldots & \varphi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Hơn nữa kiểm tra rằng, phép hợp nối ánh xạ tương ứng với phép nhân ma trận.

1.35. Cho R là vành giao hoán và R là mô đun tự do có cơ sở gồm n phần tử. Chứng minh rằng

$$\mathrm{Hom}_R(M, M) \cong M_n(R)$$

1.36. Cho các họ R_mô đun $\{A_i\}_{i\in I}$, $\{B_i\}_{i\in I}$ và $\{C_i\}_{i\in I}$. Nếu với mỗi $i \in I$ ta có dãy khớp

$$0 \longrightarrow A_i \longrightarrow B_i \longrightarrow C_i \longrightarrow 0$$

Chứng minh rằng

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} A_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} B_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} C_i \longrightarrow 0$$

cũng là dãy khớp.

1.37. Cho $V_1, V_2, \ldots, V_n$ là các không gian vec tơ hữu hạn chiều. Nếu

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow \ldots . \longrightarrow V \longrightarrow 0$$

là dãy khớp. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^n \dim V_i = 0$$

1.38. Cho D là vành chia và M là D- mô đun. Đặt

$$R := \mathrm{Hom}_D(M, M)$$

Chứng minh rằng

i) V là R-mô đun với phép nhân ngoài như sau.

$$f.r = f(r) \quad \forall r \in R, f \in Hom_D(M, M)$$

ii) Tồn tại đẳng cấu vành từ D vào $Hom_R(M, M)$.

1.39. Một R-mô đun M được gọi là Noether nếu với mọi dây chuyền tiến các mô đun con của M đều dừng. Nghĩa là, nếu họ mô đun con $\{M_i\}$ của mô đun M thoả điều kiện

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq . \ . \ . \ . \subseteq M_n \subseteq \ . \ . \ . \ .$$

Khi đó tồn tại chỉ số i sao cho $M_i = M_{i+1} = \cdots$

Chứng minh rằng các phát biểu sau là tương đương

i) M là Noether.

ii) Mọi mô đun con của M đều hữu hạn sinh.

iii) Mọi tập hợp khác rỗng các mô đun con của M đều có phần tử tối đại.

1.40. Một R_mô đun M được gọi là Artin nếu với mọi dây chuyền giảm các mô đun con của M đều dừng. Nghĩa là, nếu họ mô đun con $\{M_i\}$của mô đun M thoả điều kiện

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq . \ . \ . \ . \supseteq M_n \ . \ . \ . \ .$$

Khi đó tồn tại chỉ số i sao cho $M_i = M_{i+1} = \cdots$

Chứng minh rằng nếu M là mô đun Artin khi và chỉ khi mọi tập hợp khác rỗng các mô đun con của M đều có phần tử tối tiểu.

1.41. Vành hệ tử R được xét như R-mô đun trên chính nó. Chứng minh rằng nếu R là Noether và M là R-mô đun hữu hạn sinh thì mọi R mô đun con của M đều hữu hạn sinh.

1.42. Cho M là R- mô đun và N là mô đun của M. Chứng minh rằng

i) M là Noether nếu và chỉ nếu N và M/ N là Noether.

ii) M là Artin nếu và chỉ nếu N và M/N là Artin.

1.43. Cho dãy khớp

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

i) Chứng minh rằng M là Noether khi và chỉ khi M' và M'' là Noether.

ii) Chứng minh rằng M là Artin khi và chỉ khi M' và M'' là Artin.

1.44.

i) Cho M là mô đun Artin và $f \in Hom_R(M, M)$. Chứng minh rằng f là đơn cấu khi và chỉ khi f là đẳng cấu.

ii) Cho M là mô đun Noether và $f \in Hom_R(M, M)$. Chứng minh rằng f là toàn cấu khi và chỉ khi f là đẳng cấu.

1.45.

i) Tìm một R-mô đun Noether nhưng không Artin.

ii) Tìm một R-mô đun Artin nhưng không Noether.

1.46. Cho M là R-mô đun. Nếu $M_1, M_2, \ldots, M_n$ là những mô đun con củaM sao cho

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n$$

khi đó chứng minh rằng .

i) Nếu tất cả M_i đều là Noether thì M là Noether.

ii) Nếu tất cả các M_i đều là Artin thì M là Artin

1.47. Cho R là vành Artin và M là R-mô đun hữu hạn sinh. Chứng minh rằng mọi mô đun con của M đều là mô đun Artin.

1.48. Giả sử M là R-mô đun và M', N, N' là các mô đun con của M. Nếu

$$M = M' \oplus N \text{ Và } M = M' \oplus N'$$

Thì ta kết luận được N = N' hay không ?

CHƯƠNG II

HÀM TỬ HOM VÀ TEN XƠ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. HÀM TỬ HOM

1.1 Các khái niệm chung

• Cho X, Y là các R-mô đun. Ta ký hiệu Hom(X, Y) là tập hợp các đồng cấu từ X vào Y, trên đó trang bị một phép toán cộng được xác định như sau : $\forall f, g \in$ Hom(X, Y), tổng $(f + g)$ là đồng cấu từ X vào Y thoả mãn $\forall x \in X$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Với phép toán này Hom(X, Y) trở thành nhóm cộng aben.

• Cho các phạm trù $\mathscr{P}, \mathscr{C}$. Một hàm tử $F : \mathscr{P} \to \mathscr{C}$ (phản hàm tử $G : \mathscr{P} \to \mathscr{C}$) là một quy luật, tương ứng mỗi vật $A \in \mathscr{P}$ với một vật $f(A) \in \mathscr{C}$ ($G(A) \in \mathscr{C}$)và tương ứng mỗi cấu xạ $\alpha : A \to B$ trong phạm trù $\mathscr{P}$ với một cấu xạ $F(\alpha) : F(A) \to F(B)$ ($G(\alpha) : G(B) \to G(A)$) trong phạm trù $\mathscr{C}$ thoả hai tiên đề sau :

HT1 : Với mỗi vật $A \in \mathscr{P}$: $F(1_A) = 1_{F(A)}$ ($G(1_A) = 1_{G(A)}$)

HT2 : $F(\beta\alpha) = F(\beta).F(\alpha)$ $(G(\beta\alpha) = G(\alpha).G(\beta))$ với mỗi cặp cấu xạ (α, β) trong $\mathscr{P}$ mà xác định được tích $\beta\alpha$.

- Với Mod là phạm trù các R - mô đun trái, $\mathscr{A}b$ là phạm trù các nhóm aben. Hàm tử Hom(X, -) : Mod $\to \mathscr{A}b$ (phản hàm tử Hom(- , X) : Mod $\to \mathscr{A}b$) đặt mỗi mô đun A$\in$ Mod tương ứng với nhóm Hom(A, X) và đặt mỗi đồng cấu α từ A vào B với đồng cấu nhóm α_* : Hom(X, A) $\to$ Hom(X, B) (α^* : Hom(A, X) $\to$ Hom(B, X)) theo qui tắc $\alpha_*(\beta) = \alpha\beta$ ($\alpha^*(\beta) = \beta\alpha$) với mọi $\beta\in$ Hom(X, A) ($\beta\in$ Hom(A, X)).

1.2 Định lý về tính khớp của hàm tử Hom : *Cho* X *là mô đun bất kỳ và dãy khớp ngắn* $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$, *khi đó*

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, A) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(X, B) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(X, C) \to 0 \quad (1)$$

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(B, X) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(A, X) \to 0 \quad (2)$$

dãy (1) khớp tại Hom(X, B*) và* Hom(X, A) *, dãy (2) khớp tại* Hom(B, X) *và* Hom(C, X). *Hơn nữa nếu dãy khớp ngắn chẻ ra thì cả hai dãy (1) và (2) đều khớp và chẻ.*

2. Mô đun xạ ảnh và mô đun nội xạ

2.1. Các khái niệm chung

- Mô đun P được gọi là mô đun xạ ảnh nếu thoả một trong các tính chất sau :

i) Hàm tử Hom(P, -) là hàm tử khớp.

ii) Với mỗi toàn cấu $\sigma : B \to C$, mỗi đồng cấu $f : P \to C$ tồn tại đồng cấu $\varphi : P \to B$ sao cho $f = \sigma.\varphi$

$$\begin{tikzcd} & p \arrow[dl, "\exists\varphi"'] \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "\sigma"] & C \end{tikzcd}$$

iii) Mỗi dãy khớp $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} P \to 0$ là chẻ ra.

iv) P đẳng cấu với hạng tử trực tiếp của một mô đun tự do.

- Mô đun J được gọi là mô đun nội xạ nếu thoả một trong các tính chất sau :

i) Hàm tử Hom(- , J) là hàm tử khớp.

ii) Với mỗi đơn cấu æ : $A \to B$, mỗi đồng cấu $f : A \to J$ tồn tại đồng cấu $\overline{f}$: $A \to J$ sao cho $f = \overline{f}$ æ

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "æ"'] \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "\exists\overline{f}"] & J \end{tikzcd}$$

iii) Mỗi dãy khớp $0 \to J \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ là chẻ ra.

iv) P đẳng cấu với hạng tử trực tiếp của một mô đun nội xạ.

2.2 .Các tính chất

- Mọi mô đun tự do là mô đun xạ ảnh.

- Mô đun xạ ảnh trên vành chính là mô đun tự do.

- Tổng trực tiếp của họ mô đun $\{P_i\}_{i\in I}$ là xạ ảnh khi và chỉ khi mỗi thành phần P_i là xạ ảnh.

- Tích trực tiếp của họ mô đun $\{J_i\}_{i\in I}$ là nội xạ khi và chỉ khi mỗi thành phần J_i là nội xạ.

2.3 .Các định lý

∗ **Tiêu chuẩn Baer** : *R-mô đun J là nội xạ khi và chỉ khi với bất kỳ iđean trái I của R và bất kỳ đồng cấu* $f : I \to J$, *luôn luôn tồn tại phần tử* $q \in J$ *sao cho với mọi* $\lambda \in I$, *ta có* $f(\lambda) = \lambda q$.

∗ **Định lý nhúng của mô đun nội xạ**: *Mỗi mô đun X đều có thể nhúng vào mô đun nội xạ N(X) nào đó.*

- Nếu R là vành chính thì mọi R - mô đun chia được X đều là mô đun nội xạ.

- Nếu R là miền nguyên thì mọi mô đun nội xạ đều chia được.

4. HÀM TỬ TEN XƠ

4.1 .Các khái niệm

- Cho X_R và ${}_RY$ là các mô đun phải và mô đun trái trên vành R. Tích ten xơ của mô đun X và Y là nhóm aben, ký hiệu $X \otimes Y$, sao cho có ánh xạ song

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\varphi"'] & X \otimes Y \arrow[dl, "\exists! f"] \\ G & \end{tikzcd}$$

tuyến tính $\tau : X \times Y \to X \otimes Y$ có tính phổ dụng đối với bất kỳ ánh xạ song tuyến tính $\varphi : X \times Y \to G$, tức là tồn tại duy nhất đồng cấu $f : X \otimes Y \to G$ thoả mãn $\varphi = f.\tau$.

- Cho các đồng cấu $f : X_R \to X_R'$, $g : {}_RY \to {}_RY'$, khi đó tồn tại duy nhất đồng cấu tích ten xơ $(f \otimes g) : X \otimes X' \to Y \otimes Y'$ sao cho $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$ với mọi $x \otimes y \in X \otimes Y$.

4.2. Các tính chất và định lý

- Tích ten xơ của hai đồng cấu đồng nhất là đồng cấu đồng nhất.

- Nếu $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f'} C$ và $A' \xrightarrow{g} B' \xrightarrow{g'} C'$ là các đồng cấu R-mô đun phải và R-mô đun trái. Khi đó $(f'f \otimes g'g) = (f' \otimes g')(f \otimes g)$.

- Cho $f, f_1, f_2 : X \to X'$ là các đồng cấu R - mô đun phải và $g, g_1, g_2 : Y \to Y'$ là các dồng cấu R - mô đun trái.Khi đó

$$(f_1 + f_2) \otimes g = f_1 \otimes g + f_2 \otimes g$$

$$f \otimes (g_1 + g_2) = f \otimes g_1 + f \otimes g_2$$

∗ **Định lý tổng trực tiếp của tích ten xơ** : *Cho họ R - mô đun phải $\{X_i\}_{i\in I}$ và họ R - mô đun trái $\{Y_j\}_{j\in J}$. Khi đó*

$$\left(\bigoplus_{i\in I} X_i\right) \otimes \left(\bigoplus_{j\in J} Y_j\right) \cong \bigoplus_{(i,j)\in I\times J} \left(X_i \otimes Y_j\right)$$

∗ **Định lý toàn cấu của tích ten xơ** : *Cho $f : X \to X'$ là toàn cấu R-mô đun phải và $g : Y \to Y'$ là toàn cấu R-mô đun trái. Khi đó, ta có $f \otimes g$ là toàn cấu với*

$\text{Ker}(f \otimes g) = \langle \{x \otimes y \in X \otimes Y : x \in \text{Kerf hoặc } y \in \text{Kerg}\} \rangle$

∗ **Định lý khớp của tích ten xơ** : *Các hàm tử* $(A \otimes -)$ *và* $(- \otimes B)$ *là các hàm tử khớp về bên phải. Hơn nữa, các hàm tử* $(A \otimes -)$ *và* $(- \otimes B)$ *bảo toàn tính khớp chẻ cho dãy khớp ngắn chẻ ra.*

5. MÔ ĐUN DẸT

• Mô đun phải (trái) A được gọi là mô đun dẹt phải (trái), nếu hàm tử $(A \otimes -)$ (t.ư $(- \otimes A)$) là hàm tử khớp.

• Mỗi vành hệ tử R xem như là mô đun trên chính nó, là mô đun dẹt trái và cũng là mô đun dẹt phải.

B. BÀI TẬP

2.1. Cho các họ mô đun $\{X_i\}_{i\in I}$ và $\{Y_j\}_{j\in J}$. Hãy chứng minh rằng tồn tại đẳng cấu nhóm aben :

$$\text{Hom}\left(\bigoplus_{i\in I} X_i, \prod_{j\in J} Y_j\right) \cong \prod_{(i,j)\in I\times J} \text{Hom}(X_i, Y_j)$$

2.2. Cho X là R-mô đun, F(S) là mô đun tự do sinh bởi tập S. Chứng minh các đẳng cấu.

a) $\text{Hom}(R, X) \cong (X, +)$

b) $\text{Hom}(F(S), X) \cong \prod_{s\in S} (X, +)$.

2.3. Cho biểu đồ các đồng cấu R- mô đun

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

trong đó dòng là khớp, gh = 0 và P là mô đun xạ ảnh. Chứng minh rằng tồn tại đồng cấu $\varphi : P \to A$ mà $f\varphi = h$.

2.4. Cho biểu đồ các đồng cấu

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{h} & X & \xrightarrow{k} & Y \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \end{array}$$

trong đó hình vuông giao hoán, dòng dưới là khớp, kh = 0 và P là mô đun xạ ảnh. Chứng minh rằng tồn tại đồng cấu $\varphi : P \to A$ để hình vuông bên trái cũng giao hoán.

2.5. Chứng minh rằng mô đun xạ ảnh trên miền nguyên là mô đun không xoắn. Điều ngược lại, mỗi mô đun không xoắn trên miền nguyên có phải là mô đun xạ ảnh hay không ?

2.6. Cho biểu đồ như hình :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Chứng minh rằng dãy khớp ngắn các đồng cấu

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

có thể nhúng vào biểu đồ giao hoán ở trên.

Trong đó ba dòng , ba cột đều khớp, dòng giữa gồm những mô đun xạ ảnh, hơn nữa các cột bên trái và bên phải có thể chọn trước tuỳ ý.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

2.7. Cho biểu đồ các đồng cấu:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & C \\
 & J &
\end{tikzcd}$$

trong đó dòng là khớp, $hf = 0$ và J là mô đun nội xạ. Chứng minh rằng tồn tại đồng cấu $\varphi : C \to J$ sao cho $\varphi g = h$.

2.8. Cho biểu đồ các đồng cấu. Trong đó hình vuông bên trái giao hoán , dòng trên là khớp, $gf = 0$ và J là mô đun nội xạ. Chứng minh rằng tồn tại đồng cấu $\varphi : C \to J$ sao cho hình vuông bên phải cũng giao hoán.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \\ X \arrow[r] & Y \arrow[r] & J \end{tikzcd}$$

2.9. Chứng minh rằng mọi mô đun X không xoắn trên miền nguyên R là nội xạ nếu X là mô đun chia được.

2.10. Chứng minh rằng mỗi dãy khớp ngắn các đồng cấu

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

đều nhúng được vào biểu đồ giao hoán sau

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] \arrow[d] & N_2 \arrow[r] \arrow[d] & N_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Trong đó ba dòng, ba cột là khớp, dòng giữa là mô đun nội xa. Hơn nữa, các cột bên phải và bên trái có thể chọn trước tuỳ ý.

2.11. Chứng minh rằng mô đun P là xạ ảnh khi và chỉ khi, với mọi đồng cấu $f : P \longrightarrow C$ và mọi toàn cấu $\sigma : J \to C$ với J là mô đun nội xạ, tồn tại đồng cấu $\varphi : P \to J$ sao cho $\sigma\varphi = f$.

2.12. Chứng minh rằng mô đun J là nội xạ khi và chỉ khi, với mọi đồng cấu $f : A \to J$ và mọi đơn cấu $j : A \to P$ trong đó P là mô đun xạ ảnh, tồn tại đồng cấu $f' : P \to J$sao cho $f'j = f$.

2.13. Chứng minh rằng trong phạm trù các $\mathbb{Z}$-mô đun, một ánh xạ $\varphi : X \times Y \to C$ là song tuyến tính khi và chỉ khi φ là song cộng tính .

2.14. Cho $\mathbb{Q}$ là nhóm cộng các số hữu tỉ xem như các $\mathbb{Z}$-mô đun. Chứng minh rằng

a) $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$

b) $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$

c) Nếu A là mô đun xoắn thì $\mathbb{Q} \otimes A = 0$.

2.15. Chứng minh rằng

$$\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_d$$

Trong đó $d = (m, n)$. Từ đây suy ra rằng, nếu m, n nguyên tố cùng nhau thì $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = 0$.

2.16. Chứng minh rằng tích ten xơ của hai nhóm aben hữu hạn sinh là nhóm hữu hạn sinh.

2.17. Xét nhóm cộng các số nguyên $\mathbb{Z}$ và nhóm con $2\mathbb{Z}$ của $\mathbb{Z}$ gồm các số nguyên chẵn. Khi đó, đồng câú bao hàm $j : 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ là đơn cấu. Gọi A là nhóm cyclic cấp hai, với phần tử sinh là a tức $A = \langle a \rangle$. Chứng minh rằng : $2\mathbb{Z} \otimes A$ là nhóm cyclic cấp hai với phần tử sinh là $2 \otimes a$, tuy nhiên tích ten xơ $j \otimes 1_A$ không là đơn cấu.

2.18. Cho A là hạng tử trực tiếp của R-mô đun phải X, B là hạng tử trực tiếp của R-mô đun trái Y. Giả sử $i : A \to X$ và $j : B \to X$ là các phép nhúng . Chứng minh rằng

$$i \otimes j : A \otimes B \longrightarrow X \otimes Y$$

cũng là một phép nhúng.

2.19. Chứng minh rằng tích ten xơ hai đẳng cấu là một đẳng cấu.

2.20. Chứng minh rằng tổng trực tiếp các mô đun dẹt là mô đun dẹt khi và chỉ khi các thành phần của nó đều là các mô đun dẹt.

2.21. Chứng minh rằng mọi mô đun tự do đều là mô đun dẹt.

2.22. Chứng minh rằng mọi mô đun xạ ảnh đều là mô đun dẹt. Điều ngược lại có đúng haykhông?

C. BÀI TẬP BỔ SUNG

2.23. Cho D là vành chia và M là D-mô đun. Hãy chứng minh rằng M vừa là mô đun xạ ảnh vừa là mô đun nội xạ.

2.24. Cho R là vành có đơn vị. Chứng minh rằng các phát biểu sau đây là tương đương.

i) Mọi R-mô đun đều là mô đun xạ ảnh.

ii) Mọi dãy khớp của R-mô đun đều chẻ ra.

iii) Mọi R-mô đun đều là nội xạ.

2.25. Cho M là $\mathbb{Z}$-mô đun . Hãy chứng minh rằng M là mô đun chia được nếu và chỉ nếu M là mô đun nội xạ.

2.26.

i) Cho M là $\mathbb{Z}$-mô đun hữu hạn khác không. Chứng minh rằng M không là mô đun chia được.

ii) Chứng minh rằng không có $\mathbb{Z}$-mô đun tự do nào chia được.

2.27. Cho M là $\mathbb{Z}$-mô đun chia được . Chứng minh rằng

$$M \cong \tau(M) \oplus M/\tau(M).$$

2.28. Cho M là $\mathbb{Z}$-mô đun chia được không xoắn. Chứng minh rằng

$$M = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q}$$

2.29. Cho M là $\mathbb{Z}$-mô đun chia được, G và H là các $\mathbb{Z}$ -mô đun xoắn . Cho p là số nguyên tố, đặt

$$G_{p\infty} = \{x \in G : \exists\, n \in \mathbb{N}, np.x = 0\}.$$

$$G_p = \{x \in G\} : p.x = 0\}.$$

Chứng minh rằng

i) $\tau(M)_p$ là mô đun con của M, với mọi số nguyên tố p.

ii) $M/\tau(M)$ là không gian véc tơ trên $\mathbb{Q}$.

iii) $\tau(M)_p$ là không gian véc tơ trên $\mathbb{Z}_{p.}$

iv) $G_{p\infty} \cong H_{p\infty} \Leftrightarrow G_p \cong H_p$

2.30. Cho M và N là hai $\mathbb{Z}$-mô đun chia được. Chứng minh rằng $M \cong N$ khi và chỉ khi hai điều kiện dưới đây thoả.

i) $\mathrm{Dim}_{\mathbb{Q}} M/\tau(M) = \dim_{\mathbb{Q}} N/\tau(N)$.

ii) $\dim_{\mathbb{Z}p}\tau(M)_p = \dim_{\mathbb{Z}p} \tau(N)_p$ với mọi số nguyên tố p.

2.31. Cho R là vành có đơn vị và M là $\mathbb{Z}$-mô đun.

i) Chứng minh rằng $Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ có cấu trúc R-mô đun trái với luật nhân ngoài.

$$rf(s) = f(rs) \text{ với mọi } r, s \in R, f \in Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$$

ii) Chứng minh rằng $Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ có cấu trúc R-mô đun phải với luật nhân ngoài.

$$f(s)r = f(sr) \text{ với mọi } r, s \in R, f \in Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$$

iii) Chứng minh rằng nếu M là $\mathbb{Z}$-mô đun chia được thì $Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ là R-mô đun nội xạ

2.32. Cho R là vành Noether giao hoán. M là mô đun nội xạ và I là iđêan của R. Đặt

$$A = \{x \in M : \exists n \in N, I^n x = 0\}.$$

Chứng minh rằng : A là R-mô đun nội xạ.

2.33. Nhóm cộng giao hoán M được gọi là (R, S) -song mô đun nếu M vừa là R-mô đun trái vừa là S-mô đun phải.

Cho M là (R, S)-song mô đun, N là R-mô đun phải và L là S-mô đun trái. Chứng minh rằng

i) $M \otimes_S L$ có cấu trúc R-mô đun trái thoả

$$r(m \otimes l) = rm \otimes l \quad \forall r \in R, \forall m \in M, \forall l \in L$$

ii) $N \otimes_R M$ có cấu trúc S-mô đun phải thoả

$$(n \otimes m)s = n \otimes ms \quad \forall s \in S, \forall m \in M, \forall n \in N$$

2.34. Cho N là R-mô đun phải, M là (R, S)-song mô đun và L là S-mô đun trái. Chứng minh rằng

$$N \otimes_R (M \otimes_S L) \cong (N \otimes_R M) \otimes_S L$$

2.35. Cho R là vành giao hoán, M và N là hai R-mô đun . Chứng minh rằng, $M \otimes_R N$ có cấu trúc R mô đun thoả

$$r(m \otimes n) = rm \otimes n = mr \otimes n = m \otimes rn = m \otimes nr = (m \otimes n)r$$

Với mọi $r \in R$, $m \in M$, $n \in N$.

2.36. Cho U, V là hai không gian véc tơ hữu hạn chiều trên trường K. Chứng minh rằng

i) $U \otimes_K V$ là không gian véc tơ trên trường K.

ii) $\dim_K(U \otimes_K V) = \dim_K U \,.\, \dim_K V$.

2.37. Cho R là vành giao hoán, M và N là hai R-mô đun. Chứng minh rằng tồn tại đẳng cấu R-mô đun

$$M \otimes_R N \cong N \otimes_R M.$$

2.38. Cho R là vành giao hoán. M là R-mô đun , I và J là hai iđêal của R. Chứng minh rằng

i) $(R/ I) \otimes_R M \cong M/ IM$ theo nghĩa R-mô đun.

ii) $(R/I) \otimes_R (R/J) \cong R/ (I + J)$ theo nghĩa R-mô đun.

2.39. Cho A là một vành, R là vành giao hoán. A được gọi là R-đại số nếu A là R-mô đun thoả

$$r(ab) = (ra)b = a(rb) \text{ với mọi } r \in R, a, b \in A.$$

Chứng minh rằng nếu A là R-đại số và M là R-mô đun thì $M \otimes_R A$ có cấu trúc A-mô đun trái sao cho

$$a'(m \otimes a) = m \otimes a'a \quad \text{với mọi } a', a \in A, m \in M.$$

2.40. Cho M là R-mô đun, A là R-đại số giao hoán và B là A-đại số . Hãy chứng minh rằng tồn tại một đẳng cấu B_mô đun trái từ $(M \otimes_R A) \otimes_A B$ vào $M \otimes_R B$ tương ứng $(m\otimes a)\otimes b = m\otimes ab$.

2.41. Cho A, B là hai R-mô đun và C là R-đại số giao hoán. Chứng minh rằng tồn tại đẳng cấu C-mô đun

$$(A \otimes_R C) \otimes_C (B \otimes_R C) \cong (A \otimes_R B) \otimes_R C$$

thoả $(a\otimes c) \otimes (b \otimes c') \to (a \otimes b) \otimes cc'$.

2.42. Cho M là R-mô đun, A là R-đại số, X là A_mô đun trái và $f : M \to X$ là đồng cấu R-mô đun. Chứng minh rằng tồn tại đồng cấu A-mô đun $f_A : M \otimes_R A \to X$ thoả $f_A(m\otimes a) = af(m)$.

2.43. Cho A là R-đại số và $j : M_n(R) \to M_n(A)$ là ánh xạ mở rộng từ ánh xạ $i_A : R \to A$ cho bởi $i_A(r) = r.1$. Chứng minh rằng

i) $M_n(R) \otimes_R A \cong M_n(A)$ theo nghĩa R-đại số và theo nghĩa A- mô đun.

ii) $M_n(R) \otimes M_m(R) \cong M_{mn}(R)$.

<u>CHƯƠNG III</u>

ĐỒNG ĐIỀU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.PHỨC VÀ ĐỒNG ĐIỀU

1.1. Các khái niệm

• Dãy các đồng cấu $X : \ldots \leftarrow X_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} X_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} X_{n+1} \leftarrow \ldots$ gọi là nửa khớp, nếu tích hai đồng cấu liên tiếp là đồng cấu 0. Một phức là một dãy nửa khớp đánh số trên tập số nguyên, nếu chỉ số tăng cùng (ngược) chiều với các mũi tên đồng cấu gọi là phức tiến (lùi). Các ∂_n gọi là đồng cấu vi phân. Phức $X = \{X_n, \partial_n\}$ gọi là phức dương (âm) nếu $X_n = 0$ khi $n < 0$ $(n > 0)$ được đánh số theo chỉ số dưới (trên). Nếu không có ghi chép gì thêm ta quy ước các phức là lùi.

• Cho $X = \{X_n, \partial_n\}$ và $\{X', \partial_n'\}$ là các phức. Một biến đổi dây chuyền $f : X \to X'$ là một họ các đồng cấu $\{f_n : X_n \to X_n'\}$ sao cho biểu đồ sau giao hoán.

$$\begin{tikzcd}
X : \ \ldots & X_{n-1} \arrow[l] \arrow[d, "f_{n-1}"] & X_n \arrow[l, "\partial_n"'] \arrow[d, "f_n"] & X_{n+1} \arrow[l, "\partial_{n+1}"'] \arrow[d, "f_{n+1}"] & \ldots \arrow[l] \\
X' : \ \ldots & X'_{n-1} \arrow[l] & X'_n \arrow[l, "\partial'_n"] & X'_{n+1} \arrow[l, "\partial'_{n+1}"] & \ldots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

• Cho các phức $X = \{X_n, \partial_n\}$, $X' = \{X'_n, \partial'_n\}$ và f, g là các biến đổi dây chuyền từ X vào X'. Họ đồng cấu $s = \{s_n : X_n \to X'_{n+1}\}$ được gọi là đồng luân dây chuyền giữa hai biến đổi dây chuyền, nếu $\forall n \in \mathbb{Z}$, ta có $\partial'_{n+1}s_n + s_{n-1}\partial_n = f_n - g_n$. Khi đó ta viết $s : f \cong g$.

• Cho các phức

$$X : \ldots \leftarrow X_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} X_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} X_{n+1} \leftarrow \ldots$$

$$X' : \ldots \rightarrow X'_{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} X'_n \xrightarrow{\delta^n} X'_{n+1} \rightarrow \ldots$$

mô đun thương $H_n(X) := \mathrm{Ker}\partial_n / \mathrm{Im}\partial_{n+1}$ gọi là mô đun đồng điều thứ n của phức X. Mô đun thương $H^n(X') = \mathrm{Ker}\delta^n / \mathrm{Im}\delta^{n-1}$ gọi là mô đun đối đồng điều thứ n của X'. Các phần tử của $\mathrm{Ker}\partial_{n+1}$ ($\mathrm{Ker}\delta^n$) gọi là chu trình (đối chu trình) n - chiều còn các phần tử của $\mathrm{Im}\partial_n$ ($\mathrm{Im}\delta^{n-1}$) gọi là bờ (đối bờ) n - chiều.

Nếu G là R- mô đun, tác động hàm tử Hom(-, G) lên X ta thu được phức tăng

$$\ldots \rightarrow \mathrm{Hom}(X_{n-1}, G) \xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathrm{Hom}(X_n, G) \xrightarrow{\delta^n} \mathrm{Hom}(X_{n+1}) \rightarrow \ldots$$

đồng cấu $\delta^n : \mathrm{Hom}(X_n, G) \rightarrow \mathrm{Hom}(X_{n+1}, G)$ được xác định như sau $\delta^n(f) = (-1)^{n+1}f\partial_{n+1}$. Mô đun đối đồng điệu $H^n(\mathrm{Hom}(X, G))$ gọi là đối đồng điều của phức X lấy hệ số trong G và ký hiệu là $H^n(X, G)$.

• Cho X, X' là các phức, biến đổi dây chuyền $f : X \rightarrow X'$ được gọi là một tương đương dây chuyền, nếu tồn tại một biến đổi dây chuyền $h : X' \rightarrow X$ và các đồng luân dây chuyền $s : hf \cong 1_X$ và t :

$fh \cong 1_{X'}$. Nếu hai phức X, X' có một tương đương dây chuyền giữa chúng, ta nói X tương đương đồng luân với X'. Ký hiệu $X \cong X'$.

1.2. Các tính chất

- Tích hai biến đổi dây chuyền là một biến đổi dây chuyền.

- Quan hệ đồng luân dây chuyền và quan hệ tương đương đồng luân là các quan hệ tương đương.

- Cho f, g là biến đổi dây chuyền từ phức X vào phức X'. f', g' là biến đổi dây chuyền từ phức X' vào X''. Nếu ta có $s : f \cong g$ và $s': f' \cong g$ thì $f's + s'g : f'f \cong g'g$.

- Với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, H_n là hàm tử hiệp biến từ phạm trù các phức và các biến đổi dây chuyền tới phạm trù các mô đun, tương ứng mỗi phức X với đồng điều $H_n(X)$ và đặt mỗi biến đổi dây chuyền $f : X \to X'$ tương ứng với đồng cấu $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(X')$ cho bởi $H_n(f)[c + \partial X_{n+1}] = f(c) + \partial' X'_{n+1}$.

- $H^n(-, G)$ là hàm tử phản biến từ phạm trù các phức và các biến đổi dây chuyền tới phạm trù các nhóm aben. Hơn nữa, nếu có $s : f \approx g$ là đồng luân dây chuền giữa hai biến đổi dây chuyền $f,g: X \to X'$ thì $t: f^* \cong g^*$, ở đây $f^*, g^* : Hom(X', G) \to Hom(X, G)$ cho bởi $f^*(\alpha) = \alpha f$, $g^*(\alpha) = \alpha g$ và $t = (-1)^n s^*_{n-1}$ với $s^*(\beta) = \beta s$.

* **Định lý biến đổi đồng luân** : *Nếu $f, g : X \to X'$ là các biến đổi đồng luân dây chuyền từ phức X vào phức X' thì với mọi $n \in \mathbb{Z}$, $H_n(f) = H_n(g)$. Đặc biệt nếu f là một tương đương dây chuyền thì $H_n(f)$ là đẳng cấu.*

• Nếu $X \cong X'$ thì với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, ta có

$$H^n(X, G) \cong H^n(X', G).$$

2. DÃY ĐỒNG ĐIỀU KHỚP

2.1. Các khái niệm

• Phức $K = \{K_n, \partial_K\}$ được gọi là phức con của phức $X = \{X_n, \partial\}$ nếu mỗi $n \in \mathbb{Z}$, K_n là mô đun con của mô đun X_n và vi phân ∂_K là vết của vi phân ∂.

• Cho $K = \{K_n, \partial_K\}$ là phức con của phức $X = \{X_n, \partial\}$. Khi đó $X/K = \left\{ X_n/K_n, \partial'_n \right\}$ với $\partial'_n(x + K_n) = \partial_n(x) + K_{n-1}$ được gọi là phức thương của phức X theo phức con K.

• Cho họ các phức $\{X(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ và họ biến đổi dây chuyền $\{f(n) : X(n) \to X(n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$. Dãy

$$\ldots X(n-1) \xrightarrow{f(n-1)} X(n) \xrightarrow{f(n)} X(n+1) \to \ldots \qquad (*)$$

được gọi là khớp tại X(n) nếu $\mathrm{Im}f(n-1) = \mathrm{Ker}f(n)$. Dãy phức (*) gọi là khớp nếu nó khớp tại mọi phức trung gian.

• Với X, Y, K là các phức f, g là các biến đối dây chuyền. Khi đó ta gọi dãy khớp $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} K \to 0$, là dãy khớp ngắn các phức. Nếu với mỗi $n \in$, ta có $0 \to X_n \to Y_n \to K_n \to 0$ là dãy khớp chẻ. Khi đó ta nói dãy khớp phức ở trên là dãy khớp chẻ.

- Cho $f : X \to X'$ là một biến đổi dây chuyền. Với mọi $n \in \mathbb{Z}$

  đặt $M_n = X_{n-1} \oplus X'_n$ và $\partial(x, x') = (-\partial(x), \partial'(x') + f(x))$ với mọi cặp $(x, x') \in M_n$. Khi đó $M(f) := \{M_n, \partial\}$ là một phức và được gọi là nón ánh xạ của biến đổi f .

- Cho hai hàm tử $F, G : \mathscr{P} \to \mathscr{P}'$, từ phạm trù $\mathscr{P}$ vào phạm trù $\mathscr{P}'$. Ta nói một phép biến đổi tự nhiên $\Psi : F \to G$ là một họ các cấu xạ $\Psi : \{\varphi(X) : F(X) \to G(X)\}$ với mọi $X \in \mathscr{P}$ thoả điều kiện : Với bất kỳ cấu xạ $\alpha : X \to Y$ biểu đồ sau giao hoán

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\varphi(X)"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & G(X) \arrow[d, "G(\alpha)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\varphi(Y)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

2.2 .Các tính chất và định lý

- Cho K là phức con của phức X. Khi đó một bộ các phép nhúng $i = \{i_n : K_n \to X_n\}$ và một bộ các phép chiếu $p = \left\{ p_n : X_n \to X_n / K_n \right\}$ là các biến đổi dây chuyền.

- Cho $f : X \to X'$ là biến dổi dây chuyền của các phức và M(f) là nón ánh xạ, gọi $i = \{i_n : X'_n \to M_n\}$, $\pi = \{\pi_n : M_n \to X_{n-1}\}$ tương ứng là phép nhúng và phép chiếu . Đặt $X^+ = \{X^+, \partial^+\}$ với $X^+_n = X_{n-1}$ và $\partial^+ = -\partial$, khi đó ta có dãy khớp ngắn.

$$E_f : 0 \to X' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} X^+ \to 0$$

∗ **Định lý dãy đồng điều khớp** : *Cho dãy khớp ngắn các phức*

$$E : 0 \to X \xrightarrow{æ} Y \xrightarrow{\sigma} K \to 0$$

Khi đó dãy vô tận sau là khớp

$$\ldots \to H_{n+1}(K) \xrightarrow{\partial_E} H_n(X) \xrightarrow{H_n(æ)} H_n(Y) \xrightarrow{H_n(\sigma)} H_n(K) \xrightarrow{\partial_E} H_{n-1}(X) \to \ldots$$

∗ **Định lý dãy đối đồng điều khớp** : *Cho dãy khớp ngắn các phức có chỉ số trên*

$$E : 0 \to X \xrightarrow{æ} Y \xrightarrow{\delta} K \to 0$$

Khi đó dãy vô tận sau là khớp

$$\ldots \to H^{n-1}(K) \xrightarrow{\delta^E} H^n(X) \xrightarrow{H^n(æ)} H^n(Y) \xrightarrow{H^n(\delta)} H^n(K) \xrightarrow{\delta^E} H^{n+1}(X) \to \ldots$$

∗ **Định lý khớp nón ánh xạ** : *Biến đổi dây chuyền $f : X \to X'$ cùng nón ánh xạ $M(f)$ xác định dãy khớp sau.*

$$\ldots \to H_{n+1}(X^+) \xrightarrow{f_*} H_n(X') \xrightarrow{i_*} H_n(M) \xrightarrow{\pi_*} H_n(X^+) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(X') \to \ldots$$

• Cho $E : 0 \to X \to Y \to K \to 0$ là dãy khớp ngắn chẻ các phức. Khi đó ta có dãy khớp đối đồng điều.

$$\ldots \to H^n(K, G) \to H^n(Y, G) \to H^n(X, G) \to H^{n+1}(K, G) \to \ldots$$

• Cho $S : 0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ là dãy khớp các mô đun và X là một phức xạ ảnh nghĩa là X_n là xạ ảnh với mọi $n \in \mathbb{Z}$. Khi đó ta có dãy khớp đối đồng điều.

$$\ldots \to H^n(X, G') \to H^n(X, G) \to H^n(X, G'') \to H^{n+1}(X, G') \to \ldots$$

• Cho ξ là phạm trù các dãy khớp ngắn các phức. Đối với mỗi dãy $E \in \xi$, các đồng cấu nối $\partial_E : H_{n+1}(K) \to H_n(X)$ lập thành phép biến đổi tự nhiên từ các hàm tử $H_{n+1}(K)$ tới hàm tử $H_{n+1}(X)$.

3. ĐỒNG ĐIỀU KỲ DỊ

3.1 Các khái niệm

• Cho X là không gian tô pô và $\mathbb{R}^n$ là không gian Euclide n chiều, với $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tích vô hướng $< a, b > = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Cho các điểm $u_0, u_1, \ldots, u_m$ là m +1 điểm độc lập a fin trong $\mathbb{R}^n$. Bao lồi chứa m + 1 điểm đó là tập hợp tất cả các điểm $u = \sum_{i=1}^{m} x_i u_i$ trong đó $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ và các $x_i \geq 0$ được gọi là đơn hình a fin m- chiều . Bộ thứ tự $(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ gọi là toạ độ hướng tâm của điểm u với hệ độc lập a fin : $u_0, u_1, \ldots, u_m$. Với mỗi số nguyên không âm n, chọn trước một đơn hình mẫu Δ^n và đánh số thứ tự các đỉnh của nó: (0, 1, . . ., n), một ánh xạ liên tục $T : \Delta^n \to X$ gọi là một đơn hình kỳ dị.

- Ta gọi ánh xạ tổng của phép tịnh tiến với phép biến đổi tuyến tính là phép biến đổi a fin. Nếu $v_0, v_1, \ldots, v_m$ là tập sắp thứ tự các điểm của một tập lồi C,. Ta gọi ánh xạ a fin $f : E \to E$ chuyển đỉnh thứ i của đơn hình mẫu Δ^n vào điểm v_i là đơn hình kỳ dị a fin n chiều và ký hiệu là $(v_0, v_1, \ldots v_n)_C : \Delta^n \to C$ và J_n là phép đồng nhất đơn hình Δ^n lên chính nó.

- Gọi $\varepsilon^i_n := (0, 1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n)\Delta^n : \Delta^{n-1} \to X$. Với $T : \Delta^n \to X$ là đơn hình kỳ dị n chiều, ta định nghĩa $d_iT := T\varepsilon^i_n$ là toàn tử lấy biên thứ i của T. Khi đó $d_iT = T\varepsilon^i_n = T(d_iJ_n)$ và $d_id_jT = d_{j-1}d_i T$ nếu $i < j$.

- Với mỗi $n \geq 0$, gọi $S_n(X)$ là nhóm aben tự do sinh bởi tập các đơn hình kỳ dị n - chiều của không gian tô pô X. Định nghĩa toán tử vi phân $\partial : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ cho bởi $\partial(T) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_iT$, khi đó ta có phức

$$\ldots \leftarrow 0 \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{\varepsilon} S_0(X) \xleftarrow{\partial} S_1(X) \xleftarrow{\partial} \ldots \leftarrow S_n(X) \leftarrow \ldots$$

với ε là đồng cấu chuyển các đơn hình kỳ dị 0-chiều vào phần tử $1 \in \mathbb{Z}$. Ta gọi nhóm $H_n(X) := H_n(S_n(X))$ là nhóm đồng điều kỳ dị thứ n.

- Cho X, Y là hai không gian tô pô, hai ánh xạ liên tục f, g từ X vào Y được gọi là đồng luân với nhau nếu tồn tại ánh xạ liên tục $F : X \times [0, 1] \to Y$ sao cho $\forall x \in X$, ta có $F(x, 0) = f(x)$ và $F(x, 1) = g(x)$. Khi đó ta viết $F : f \cong g : X \to Y$.

3.2. Các tính chất và định lý

• Với mỗi $n > 0$, đồng điều kỳ dị $H_n(X)$ là hàm tử hiệp biến từ phạm trù các không gian tô pô tới phạm trù các nhóm aben.

• Nếu $f \cong g : X \to Y$ là các ánh xạ liên tục đồng luân với nhau thì các biến đổi dây chuyền cảm sinh $S(f), S(g) : S(X) \to S(Y)$ là đồng luân dây chuyền với nhau. Hơn nữa các đồng cấu cảm sinh $H_n(f), H_n(g) : H_n(X) \to H_n(Y)$ là bằng nhau.

B. BÀI TẬP

3.1. Ta gọi S là q–biệt lập nếu $S_n = 0$ khi $n \notin \{q, q+1\}$ và đồng cấu $\partial : S_{q+1} \to S_q$ là đơn cấu. Chứng minh rằng mỗi phức X của các nhóm aben tự do X_n, là tổng trực tiếp của các phức q–biệt lập (theo với mỗi chỉ số q, có chỉ một hạng tử).

3.2. Ta gọi phức q–biệt lập S các nhóm aben là phức sơ cấp nếu $S_{q+1} = S_q = \mathbb{Z}$ hay $S_q = \mathbb{Z}$, $S_{q+1} = 0$. Chứng minh rằng mỗi phức q– biệt lập S mà S_q và S_{q+1} là các nhóm aben tự do hữu hạn sinh là tổng trực tiếp các phức sơ cấp.

3.3. Chứng minh rằng, mỗi phức X với các X_n là các nhóm aben tự do hữu hạn sinh là tổng trực tiếp các phức sơ cấp.

3.4. Mỗi mô đun A có thể coi như phức tầm thường với $A_0 = A$ và $A_n = 0$ khi $n \neq 0$.

Cho phức dương X và biến đổi dây chuyền $\varepsilon : X \to A$. Đồng luân co rút đối với ε là biến đổi dây chuyền $f : A \to X$ sao cho $\varepsilon f = 1_A$ và đồng luân $s : 1 \cong f\varepsilon$. Chứng minh rằng nếu biến đổi dây chuyền $\varepsilon : X \to A$ có đồng luân co rút thì ta có các nhóm đồng điều

$$H_n(X) = 0 \text{ khi } n > 0 \text{ và } \varepsilon_* : H_0(X) \cong A$$

3.5. Chứng minh rằng tính hợp lý của công thức xác định đồng cấu nối $\partial_E : H_{n+1}(K) \to H_n(X)$ trong định lý dãy đồng điều khớp.

Chứng minh tính chất đồng cấu của ∂_E.

3.6. Hãy mô tả đồng cấu nối

$$\delta^E : H^n(X, G) \to H^{n+1}(K, G)$$

giữa các nhóm đối đồng điều, sinh ra bởi dãy khớp các phức nhóm aben có được khi tác động hàm tử Hom(-, G) vào dãy khớp ngắn chẻ ra các phức

$$E : 0 \to X \to Y \to K \to 0$$

trong định lý dãy đối đồng điều khớp.

3.7. Cho dãy khớp ngắn chẻ các phức :

$$E : 0 \to X \to Y \to K \to 0$$

và G là mô đun. Hãy viết dãy đồng điều khớp của dãy khớp các phức được tạo ra khi tác động hàm tử Hom(G, -) vào dãy E.

3.8. Cho dãy khớp ngắn chẻ các R – mô đun

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

và phức $X = \{X_n, \partial\}$

a) Hãy viết dãy đối đồng điều khớp của dãy khớp các phức sau :

$$0 \to \mathrm{Hom}(A, X) \to \mathrm{Hom}(B, X) \to \mathrm{Hom}(C, X) \to 0$$

b) Hãy viết dãy đồng điều khớp của dãy khớp các phức sau :

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, C) \to \mathrm{Hom}(X, B) \to \mathrm{Hom}(X, A) \to 0$$

3.9. Cho dãy khớp ngắn các R– mô đun và phức $X = \{X_n, \partial\}$ gồm các mô đun nội xạ. Chứng minh rằng dãy các phức sau là khớp và viết dãy đối đồng điều khớp của nó :

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, X) \to \mathrm{Hom}(B, X) \to \mathrm{Hom}(A, X) \to 0$$

Trong đó dãy khớp ngắn các mô đun là

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

3.10. Cho các biến đổi dây chuyền $f \cong g : X \to X'$. Chứng minh rằng các dãy đồng điều khớp tương ứng với các nón ánh xạM(f) và M(g) là đẳng cấu với nhau.

3.11. Cho biểu đồ giao hoán các R - mô đun

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & \to & B & \to & C \to 0 \\ & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow \\ 0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' \end{array}$$

Trong đó dòng là khớp.

Sử dụng định lý dãy đồng điều khớp, chứng minh rằng từ biểu đồ trên ta có dãy khớp sau :

$\mathrm{Ker}\alpha \to \mathrm{Ker}\beta \to \mathrm{Ker}\gamma \to A'/\mathrm{Im}\alpha \to B'/\mathrm{Im}\beta \to C'/\mathrm{Im}\gamma$.

3.12. Cho G là bao lồi của các điểm độc lập a fin :$u_0, u_1, \ldots, u_m$ Chứng minh rằng điểm $u \in G$ là trùng với một trong các điểm u_i khi và chỉ khi u luôn luôn là một trong hai đầu mút của đoạn thẳng bất kỳ nằm trong G chứa u.

3.13. Hãy tính các nhóm đồng điều kỳ dị $H_n(X)$ của không gian tô pô X chỉ gồm có một điểm duy nhất.

3.14. Hãy sử dụng toạ độ hướng tâm của điểm u bất kỳ thuộc đơn hình mẫu Δ^n để biểu diễn công thức của đơn hình kỳ dị n – chiều T bất kỳ : $T(u) = T(x_0, x_1, \ldots, x_m)$. Sử dụng công thức này để mô tả công thức của toàn tử lấy biên thứ i của đơn hình kỳ dị T. Từ đó sử dụng các công thức đó để chứng minh hệ thức

$$d_i d_j T = d_{j-1} d_i T \quad i < j.$$

3.15. Cho X là không gian tô pô liên thông tuyến tính. Chứng minh rằng các nhóm đồng điều kỳ dị

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}$$

3.16. Ta nói không gian tô pô X là co rút vào điểm $x_0 \in X$ nếu các ánh xạ đồng nhất 1_X và ánh xạ hằng X vào x_0 là đồng luân với nhau. Chứng minh rằng:

a)) Mỗi tập lồi C trong không gian Euclide là co rút vào bất kỳ điểm $w \in C$

b) Nếu X là không gian tô pô co rút vào điểm $x_0 \in X$ thì các nhóm đồng điều kỳ dị

$$H_n(X) = 0 \text{ khi } n > 0 \text{ và } H_0(X) \cong \mathbb{Z} \quad .$$

CHƯƠNG IV

HÀM TỬ TOR_n VÀ HÀM TỬ EXT^n

A.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.HÀM TỬ TOR_n

1.1 Các khái niệm

- Cho A là mô đun, dãy khớp các đồng cấu

$$X : 0 \leftarrow A \xleftarrow{\partial} X_0 \xleftarrow{\partial} X_1 \leftarrow \ldots \xleftarrow{\partial} X_n \leftarrow \ldots$$

được gọi là một phép giải của A. Nếu với mọi n, X_n là mô đun tự do (t.ư nội xạ) thì dãy khớp trên được gọi là phép giải tự do (t,ư phép giải xạ ảnh) .

- Cho A là R - mô đun phải và $X : 0 \leftarrow A \xleftarrow{\partial} X_0 \xleftarrow{\partial} X_1 \leftarrow \ldots$ là phép giải xạ ảnh của A. Với mỗi R-mô đun trái B ta có dãy nữa khớp

$$X \otimes B : 0 \leftarrow A \otimes B \xleftarrow{\partial \otimes 1} X_0 \otimes B \xleftarrow{\partial \otimes 1} X_1 \otimes B \leftarrow \ldots$$

Tích xoắn Tor được định nghĩa như sau:$Tor_0(A, B) = A \otimes B$, $Tor(A, B) = H_1(X \otimes B)$,$Tor_n(A, B) = H_n(X \otimes B)$ khi $n > 1$.

- Cho $h : A \to A'$ là đồng cấu R-mô đun phải và $k : B \to B'$ là đồng cấu R- mô đun trái. Gọi X, X' là hai phép giải xạ ảnh của A, A' và $f = \{f_n : X_n \to X'_n\}$ là biến đổi dây chuyền từ X vào X' thoả $f_{-1} = h$. Đồng cấu $(f \otimes k)_{*n} : Tor_n(A, B) \to Tor_n(A', B')$ cảm sinh từ đồng cấu $(f_n \otimes k)$ được gọi là tích xoắn n - chiều của đồng cấu h, k và ký hiệu là $Tor_n(h, k)$. Tại n = 1, ta định nghĩa $Tor_0(h,k) = h \otimes k$.

1.2. Các tính chất

- Mọi R - mô đun đều tồn tại phép giải tự do.

- Cho X, Y là các phép giải xạ ảnh của các mô đun A, B. Nếu f, g là hai biến đổi dây chuyền từ X vào Y bắt đầu cung đồng cấu $\alpha: A \to B$ thì $X \cong Y$.

- Hai phép giải xạ ảnh bất kỳ của cùng một mô đun A đều tương đương đồng luân với nhau.

- Tích xoắn mô đun Tor không phụ thuộc vào phép giải xạ ảnh

- Tích xoắn các đồng cấu không phụ thuộc vào sự chọn lựa biến đổi dây chuyền và phép giải xạ ảnh.

- Nếu A hoặc B là R - mô đun xạ ảnh thì $Tor_n(A, B) = 0$ với mọi $n > 0$.

- Cho B là R - mô đun trái và dãy khớp R - mô đun phải

$$0 \to M \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} A \to 0$$

với P là mô đun xạ ảnh. Khi đó $Tor_n(A, B) \cong Tor_{n-1}(M, B)$ và $Tor(A, B) \cong Ker(f \otimes i)$.

- Với mọi n > 0, Tor_n là hàm tử hiệp biến của hai biến.

∗ Định lý dãy khớp của tích xoắn

i) *Với mọi R-mô đun phải A và mọi dãy khớp ngắn các R-mô đun trái*

$$0 \to B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \to 0$$

ta có dãy khớp : $0 \leftarrow A \otimes B'' \xleftarrow{i\otimes f} A \otimes B \xleftarrow{i\otimes g} A \otimes B' \xleftarrow{\partial_E} \ldots \leftarrow$

$Tor_{n-1}(A, B') \xleftarrow{\partial_E} Tor_n(A, B'') \xleftarrow{g_*} Tor_n(A, B) \xleftarrow{f_*} Tor_n(A, B'') \leftarrow \ldots$

ii) *Với mọi R-mô đun trái B mọi dãy khớp ngắn các R- mô đun phải*

$$0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$$

ta có dãy khớp : $0 \leftarrow A'' \otimes B \xleftarrow{i\otimes f} A \otimes B \xleftarrow{i\otimes g} A \otimes B' \xleftarrow{\partial_E} \ldots \leftarrow$

$Tor_{n-1}(A', B) \xleftarrow{\partial_E} Tor_n(A'', B) \xleftarrow{g_*} Tor_n(A, B) \xleftarrow{f_*} Tor_n(A', B) \leftarrow \ldots$

2.HÀM TỬ EXT^n

2.1 Các khái niệm

- Cho A, B là các R - mô đun trái và

$$X : 0 \leftarrow A \xleftarrow{\partial} X_0 \xleftarrow{\partial} X_1 \leftarrow \ldots$$

là phép giải xạ ảnh của A. Với mỗi R-mô đun trái B ta có dãy nữa khớp

$$\mathrm{Hom}(X \otimes B) : \ldots \xleftarrow{\delta} \mathrm{Hom}(X_{n+1} \otimes B) \xleftarrow{\delta} \mathrm{Hom}(X_n \otimes B) \leftarrow \ldots$$

với $\delta = \mathrm{Hom}(\partial, i)$ ở đây i là đồng cấu đồng nhất của B. Tích mở rộng Ext^n được định nghĩa như sau: $\mathrm{Ext}^n(A, B) = H^n(\mathrm{Hom}(X, B))$ và $\mathrm{Ext}^0(A, B) = \mathrm{Hom}(A, B)$.

- Cho $h : A' \to A$ và $k : B' \to B$ là các đồng cấu R- mô đun trái. Gọi X, X' là hai phép giải xạ ảnh của A, A' và $f = \{f_n : X'_n \to X_n\}$ là biến đổi dây chuyền từ X' vào X thoả $f_{-1} = h$. Đồng cấu $\mathrm{Hom}(f, k)^{*n} : \mathrm{Ext}^n(A, B) \to \mathrm{Ext}^n(A', B')$ cảm sinh từ đồng cấu $\mathrm{Hom}(f_n, k)$ được gọi là tích mở rộng n - chiều của đồng cấu h, k và ký hiệu là $\mathrm{Ext}^n(h, k)$. Tại n = 0, ta định nghĩa $\mathrm{Ext}^o(A, B) = \mathrm{Hom}(h, k)$.

2.2. Các tính chất

- Tích mở rộng mô đun Ext không phụ thuộc vào phép giải xạ ảnh.

- Tích mở rộng các đồng cấu không phụ thuộc vào sự chọn lựa biến đổi dây chuyền và phép giải xạ ảnh.

- Nếu A là R - mô đun trái xạ ảnh thì $\mathrm{Ext}^n(A, B) = 0$ với $\forall n > 0$ và với mọi R - mô đun trái B.

- Nếu B là R - mô đun trái nội xạ thì $Ext^n(A, B) = 0$ với $\forall n > 0$ và với mọi R - mô đun trái A.

- Cho B là R - mô đun trái và dãy khớp R - mô đun trái

$$0 \to M \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} A \to 0$$

với P là mô đun xạ ảnh. Khi đó $Ext^n(A, B) \cong Ext^{n-1}(M, B)$ và $Tor(A, B) \cong Coker[Hom(f, i)]$.

- Với mọi $n > 0$, Ext^n là hàm tử của hai biến, phản biến theo biến thứ nhất và hiệp biến theo biến thứ hai.

*** Định lý dãy khớp của tích mở rộng**

i) *Với mọi R-mô đun trái A và mọi dãy khớp ngắn các R- mô đun trái*

$$0 \to B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \to 0$$

ta có dãy khớp : $0 \longrightarrow Hom(A, B') \xrightarrow{Hom(i, f)} Hom(A \otimes B) \xrightarrow{Hom(i, g)}$

$Hom(A, B'') \xrightarrow{\partial_E} \ldots \xrightarrow{\partial_E} Ext^n(A, B') \xrightarrow{f^*} Ext^n(A, B) \xrightarrow{g^*}$

$Ext^n(A, B'') \xrightarrow{\partial_E} Ext^{n+1}(A, B') \longrightarrow \ldots.$

ii) *Với mọi R-mô đun trái B, với mọi dãy khớp ngắn các R-mô đun trái*

$$0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$$

$$\textit{ta có dãy khớp}: 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A'', B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(g,\, i)} \mathrm{Hom}(A \otimes B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f,\, i)}$$

$$\mathrm{Hom}(A', B) \xrightarrow{\partial_E} \ldots \xrightarrow{\partial_E} \mathrm{Ext}^n(A'', B) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Ext}^n(A, B) \xrightarrow{g^*}$$

$$\mathrm{Ext}^n(A', B) \xrightarrow{\partial_E} \mathrm{Ext}^{n+1}(A'', B) \longrightarrow \ldots.$$

B. BÀI TẬP

4.1. Ta định nghĩa phép giải nội xạ của một mô đun trái trên vành R là dãy khớp

$$X : 0 \to A \to X^0 \to X^1 \to \ \ldots \to X^n \to X^{n+1} \to \ldots$$

những mô đun trái trên R, sao cho X^n là mô đun nội xạ với mọi số tự nhiên n.

Hãy chứng minh rằng mọi mô đun trái A trên R đều có phép giải nội xạ và bất kỳ hai phép giải nội xạ của(cùng một mô đun A đều tương đương đồng luân với nhau.

4.2. Chứng minh rằng mọi mô đun A trên vành chính đều có phép giải tự do X với $X_n = 0$ với mọi $n > 1$.

4.3. Chứng minh rằng với mọi R-mô đun phải A, mọi phép giải xạ ảnh Y của R-mô đun trái của B ta có

$$\mathrm{Tor}_n(A, B) \cong H_n(A \otimes Y)$$

4.4. Cho

$$0 \to A' \xrightarrow{f} P \to A \to 0$$

là dãy khớp ngắn của các R-mô đun phải và

$$0 \to B' \xrightarrow{g} Q \to B \to 0$$

là dãy khớp ngắn của các R_mô đun trái trong đó P và Q là các mô đun xạ ảnh. Chứng minh rằng

$$Tor_n(A, B) \cong Tor_{n-2}(A', B')$$

với mọi n >2 và

$$Tor_2(A, B) \cong Ker(f \otimes g)$$

4.5. Cho A là R- mô đun phải bất kỳ với i là đồng cấu đồng nhất của nó. Chứng minh rằng các phát biểu sau là tương đương.

a) Tor(A, B) = 0 với mọi mô đun trái B trên R.

b) $Tor_n(A, B) = 0$ với mọi số tự nhiên n > 0 và với mọi mô đun trái B trên R.

c) Nếu $f : X \to Y$ là đơn cấu các mô đun trái trên R thì $i \otimes f$ cũng vậy.

d) Mọi dãy khớp những mô đun trái trên R vẫn còn khớp dưới phép nhân ten xơ với A.

e) Với mọi mô đun trái B trên R và mọi dãy khớp ngắn các mô đun phải trên R

$$0 \to A' \to A'' \to A \to 0$$

dãy sau bao giờ cũng khớp

$$0 \to A' \otimes B \to A'' \otimes B \to A \otimes B \to 0$$

4.6. Xét trường hợp vành R là vành $\mathbb{Z}$ tất cả các số nguyên. Với hai nhóm aben bất kỳ A và B. Đặt S là tập con của tích Đề Các $W = A \times B \times \mathbb{Z}$ gồm tất cả các phần tử $(x, y, n) \in W$ sao cho $nx = 0$ trong A và $ny = 0$ trong B. Gọi F là nhóm aben tự do sinh ra bởi tập S và G là nhóm con nhỏ nhất của S chứa tất cả các phần tử có dạng

$$(x_1 + x_2, y, n) - (x_1, y, n) - (x_2, y, n)$$

$$(x, y_1 + y_2, n) - (x, y_1, n) - (x, y_2, n)$$

$$(x, y, mn) - (mx, y, n)$$

$$(x, y, mn) - (x, my, n)$$

với mỗi bộ ba trong dấu ngoặc là các phần tử của S. Hãy chứng minh rằng

$$\mathrm{Tor}(A, B) \cong F/G$$

Từ đó suy ra $\mathrm{Tor}(A, B) = 0$ nêú A hoặc B không xoắn.

4.7. Chứng minh rằng với hai mô đun bất kỳ A và B trên một miền iđêan chính R ta có

$$\mathrm{Tor}_n(A, B) = 0 \quad \text{với mọi } n > 1$$

$$\mathrm{Tor}(A, B) = \mathrm{Ker}\,(f \otimes i)$$

Trong đó $f \otimes i$ là tích ten xơ của đồng cấu $f : A' \to F$ trong một dãy khớp ngắn bất kỳ

$$0 \to A' \to F \to A \to 0$$

Trong đó F là mô đun tự do và i là tự đồng cấu đồng nhất từ B vào B.

4.8. Chứng minh rằng với mỗi mô đun A bất kỳ trên một miền iđêan chính R và một dãy khớp ngắn bất kỳ

$$0 \to B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \to 0$$

những mô đun trái trên R, ta có dãy khớp

$$0 \to \mathrm{Tor}(A, B') \to \mathrm{Tor}(A, B) \to \mathrm{Tor}(A, B'') \xrightarrow{\partial}$$

$$\to A \otimes B' \to A \otimes B \to A \otimes B'' \to 0$$

Ở đây ∂ là đồng cấu nối, còn các đồng cấu khác là tích xoắn và tích ten xơ của đồng cấu đồng nhất $i : A \to A$ và các đồng cấu f và g tương ứng.

4.9. Nếu A và B là các nhóm aben hữu hạn, chứng minh rằng

$$A \otimes B \cong \mathrm{Tor}(A, B)$$

4.10. Cho dãy khớp ngắn

$$0 \to B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \to 0$$

Mô tả đồng cấu nối ∂_E trong định lý dãy khớp của tích mở rộng.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B') \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B'')$$

$$\xrightarrow{\partial_E} \mathrm{Ext}(A, B') \xrightarrow{f^*} \mathrm{Ext}(A, B) \longrightarrow \ldots$$

4.11. Cho Avà B là các R-mô đun trái trên R. Chọn phép giải nội xạ bất kỳ Y của B. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có

$$H^n[\mathrm{Hom}(A, Y)] \cong \mathrm{Ext}^n(A, B)$$

4.12. Cho A và B là các R-mô đun trái trên R và một dãy khớp ngắn bất kỳ

$$0 \to B \to J \xrightarrow{g} B' \to 0$$

Với mô đun nội xạ J trên R. Chứng minh rằng

$$\mathrm{Ext}^n(A, B) \cong \mathrm{Ext}^{n-1}(A, B'), \quad n > 1$$

$$\mathrm{Ext}(A, B) \cong \mathrm{Coker}[\mathrm{Hom}(i,g)].$$

4.13. Cho các dãy khớp ngắn

$$0 \to A' \xrightarrow{f} P \to A \to 0$$

$$0 \to B \to J \xrightarrow{g} B' \to 0$$

những mô đun trái trên R, trong đó P là mô đun xạ ảnh và J là mô đun nội xạ. Chứng minh rằng

$$\mathrm{Ext}^n(A, B) \cong \mathrm{Ext}^{n-2}(A', B') \qquad n > 2$$

$$\mathrm{Ext}^2(A, B) \cong \mathrm{Coker}[\mathrm{Hom}(f, g)].$$

4.14. Chứng minh rằng với mỗi mô đun trái bất kỳ A trên R, các phát biểu sau là tương đương.

a) A là xạ ảnh.

b) $\mathrm{Ext}(A, B) = 0$ với mọi mô đun trái B trên R.

c) $\mathrm{Ext}^n(A, B) = 0$ với mọi $n > 0$ và mọi mô đun trái B trên R.

4.15. Chứng minh rằng với mỗi mô đun trái bất kỳ B trên R các phát biểu sau là tương đương.

a) B là nội xạ

b) $\mathrm{Ext}(A, B) = 0$ với mọi mô đun trái trên A trên R.

c) $\mathrm{Ext}^n(A, B)$ với mọi $n > 0$ và mọi R-mô đun trái A.

4.16. Chứng minh rằng với mỗi mô đun A bất kỳ trên miền iđêan chính R và mỗi dãy khớp ngắn bất kỳ

$$0 \to B' \to B \to B'' \to 0$$

những mô đun trái trên R, ta có dãy khớp

$$0 \to \mathrm{Hom}(A, B') \to \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, B'') \to$$
$$\delta$$
$$\to \mathrm{Ext}(A, B,) \to \mathrm{Ext}(A, B) \to \mathrm{Ext}(A, B'') \to 0$$

Trong đó δ là đồng cấu nối còn các đồng cấu khác là các hàm hom và tích mở rộng của đồng cấu đồng nhất i : A → A và các đồng cấu f và g tương ứng.

PHẦN II

LỜI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

CHƯƠNG I

1.1

($\Rightarrow$) Giả sử X là R- mô đun trái. Với mọi $r \in R$, ta định nghĩa

$$f_r : X \longrightarrow X$$
$$x \to rx$$

Với mọi $x_1, x_2 \in X$, ta có

$$f_r(x_1 + x_2)$$

$$= r(x_1 + x_2)$$

$$= r x_1 + r x_2$$

$$= f_r(x_1) + f_r(x_2)$$

Suy ra $f_r \in$ Hom (X, X). Với mọi $x \in X$, với mọi $r, s \in R$. Ta có

- $f_1(x) = 1.x = x \Rightarrow f_1 = 1_X$ (1)
- $f_{r+s}(x) = (r + s)x = rx + sx = f_r(x) + f_s(x)$

$\Rightarrow \quad f_{r+s} = f_r + f_s$ (2)

- $f_{rs}(x) = rs\,x = f_r(s\,x) = f_r f_s(x)$

$\Rightarrow f_{rs} = f_r f_s$ (3)

Xét ánh xạ

$$\varphi : R \longrightarrow \text{Hom}(X, X)$$
$$r \to f_r$$

Theo (1), (2), (3) thì φ chính là đồng cấu vành cần tìm .

($\Leftarrow$) Giả sử tồn tại đồng cấu vành $\varphi : R \to \text{Hom}(X, X)$ thoả mãn $\varphi(1) = 1_X$. Ta định nghĩa phép nhân ngoài từ R vào X như sau.

$$r.x = \varphi(r)(x) \quad \text{với mọi } r \in R, \text{ với mọi } x \in X$$

Với phép toán định nghĩa trên, X trở thành R-mô đun trái. Thật vậy, với mọi $x, y \in X$, $r, s \in R$

- $M_1 : 1.x = \varphi(1)(x) = 1_X(x) = x$.
- $M_2 : (rs)x = \varphi(rs)x = \varphi(r)[\varphi(s)(x)] = \varphi(r)(sx) = r(sx)$.
- $M_3 : r(x + y) = \varphi(r)(x + y) = \varphi(r)x + \varphi(r)y = rx + ry$.
- $M_4 : (r + s)x = \varphi(r + s)(x) = [\varphi(r) + \varphi(s)](x) = \varphi(r)(x) + \varphi(s)(x) = rx + sx$.

1.2.

$x + y = -[-(x + y)]$

$\quad = -[(-1)(x + y)]$

$= -[(-1)x + (-1)y]$

$= -(-1)y - (-1)x$

$= y + x$.(đpcm)

1.3. Với mọi $t, s \in K$, $r \in R$, ta có

$$sx + tx = (s + t)x \in Kx$$

$$r(sx) = (rs)x \in Kx$$

Vậy Kx là mô đun con của X.

1.4.

a) Lấy $x, y \in \tau(X)$, khi đó tồn tại $\lambda, \mu \in R\setminus\{0\}$ sao cho

$$\lambda x = 0, \quad \mu y = 0$$

vậy $\lambda\mu(x + y) = \lambda\mu(x) + \lambda\mu(y) = \mu(\lambda x) + \lambda(\mu y) = 0$, do ta có $\mu\lambda \neq 0$ nên $x + y \in \tau(X)$.

Với mọi $r \in R$, ta có $\lambda r \in R$, khi đó $\lambda r x = r\lambda x = 0$. Vậy $rx \in \tau(X)$ bởi $\lambda \neq 0$.

b) Giả sử A là mô đun con của mô đun xoắn X. Khi đó $\forall x \in A$ thì x là phần tử không xoắn, điều này chứng tỏ $A \subseteq \tau(A)$. Hiển nhiên $\tau(A) \subseteq A$. Vậy A là mô đun xoắn.

c) Theo giả thiết

$$X = \{x \in X : \forall\lambda \in R\setminus\{0\}, \lambda x \neq 0\} \cup \{0\}$$

Với A là mô đun con của X nên

$$A = \{x \in A : \forall\lambda \in R\backslash\{0\}, \lambda x \neq 0\} \bigcup \{0\}$$

do đó A là mô đun không xoắn.

d) Lấy $x + \tau(X) \in \tau\,[X / \tau(X)]$, khi đó tồn tại $\lambda \in R\backslash\{0\}$ sao cho

$$\lambda x + \tau\,(X) = \tau(X)$$

Vậy $\lambda x \in \tau(X)$, suy ra có $r \in R\backslash\{0\}$ sao cho $r\lambda x = 0$ với $r\lambda \neq 0$. Điều này chứng tỏ $x \in \tau(X)$ hay $x + \tau(X) = 0$. Vậy $\tau[X / \tau(X)] = \{0\}$, suy ra $X / \tau(X)$ là mô đun không xoắn.

e) Lấy $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ khi đó

$$x := mn^{-1} + \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad \text{với } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

Ta có $nx = m + \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$, do đó $x \in \tau(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ điều này chứng tỏ $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \tau(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tức $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ là mô đun xoắn .

1.5.

a) Giả sử x_1, x_2 là phần tử tuỳ ý của $\delta(X)$. Với mọi $0 \neq \lambda \in R$ khi đó tồn tại $y_1, y_2 \in X$ sao cho $x_1 = \lambda y_1$, $x_2 = \lambda y_2$. Vậy

$$x_1 + x_2 = \lambda y_1 + \lambda y_2 = \lambda(y_1 + y_2) \qquad (1)$$

Với mọi $r \in R$, ta có $ry \in X$ và $rx = r(\lambda y) = \lambda(ry)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\delta(X)$ là mô đun chia được.

b) Giả sử X là mô đun chia được và A là mô đun con của X. Với mọi $x \in X$, $0 \neq \lambda \in R$ khi đó tồn tại $y \in X$ sao cho

$x = \lambda y$ suy ra $x + A = \lambda y + A$. Điều này chứng tỏ mô đun thương của mô đun chia được là mô đun chia được.

c) Lấy $x := mn^{-1} \in \mathbb{Q}$, với $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Với mọi $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ lấy $y := mk^{-1}n^{-1} \in \mathbb{Q}$, ta có $x = ky$. Vậy $\mathbb{Q}$ là $\mathbb{Z}$-mô đun chia được. Từ $\mathbb{Z}$ là $\mathbb{Z}$- mô đun con của $\mathbb{Q}$, theo (b) thì $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ là mô đun chia được .

1.6. Gọi S là hệ sinh của X, khi đó với mọi $x \in R$

$$x := \sum_{h.h} r_i s_i \quad \text{với } r_i \in R, s_i \in S$$

$$f(x) = f\left(\sum_{h.h} r_i s_i \right) = \sum_{h.h} r_i f(s_i)$$

Vậy f duy nhất xác định bởi giá trị của f trên hệ sinh S của X. Dễ thấy không phải ánh xạ $g : S \rightarrow Y$ nào cũng có thể mở rộng thành đồng cấu f đi từ X vào Y. Ta xét ví dụ sau, xem $\mathbb{Z}$ như là $\mathbb{Z}$-mô đun. Với 2, 3 là hai phần tử nguyên tố cùng nhau trong ta có $S = \{2, 3\}$ là tập sinh của $\mathbb{Z}$. Xét ánh xạ

$$g : S \rightarrow \mathbb{Z} \text{ cho bởi } g(2) = -1 \text{ và } g(3) = 0$$

Giả sử g thác triển thành đồng cấu f mà $f|_S = g$, khi đó

$$f(1) = f(-1\times 2 + 3) = -1f(2) + f(3) = 1$$

Suy ra $f(5) = 5f(1) = 5\times 1 = 5$

nhưng $f(5) = f(2 + 3) = f(2) + f(3) = -1$.

Điều vô lý này chứng tỏ g không thác triển thành đồng cấu được.

Để g có thể thác triển thành đồng cấu f, điều kiện của S là cơ sở của X. Thật vậy, giả sử $S := \{x_i\}_{i\in I}$ là cơ sở của X, khi đó với $x \in X$, x được viết duy nhất

$$x := \sum_{hh} r_i x_i \text{ với } r_i \in R, x_i \in S \qquad (*)$$

Định nghĩa ánh xạ $f : X \to Y$ cho bởi $f(x) := \sum_{hh} r_i\, g(x_i)$. Từ sự duy nhất của (*) ánh xạ f hoàn toàn xác định, dễ thấy f là R- đồng cấu và f thu hẹp trên S chính là ánh xạ g.

1.7. Vì f và g là hai R-đồng cấu nên (f – g) cũng là R- đồng cấu do dó Ker (f - g) là mô đun con của X. Mặt khác

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f - g) &= \{x \in X : (f - g)(x) = 0\} \\ &= \{x \in X : f(x) - g(x) = 0\} \\ &= \{x \in X : f(x) = g(x)\} = A \end{aligned}$$

Vậy A là mô đun con của X (đpcm).

1.8.

a) Giả sử B là mô đun con của Imf, khi đó $f^{-1}(B)$ là mô đun con của X. Vì X là mô đun đơn nên

$$f^{-1}(B) = X \quad \text{hoặc} \quad f^{-1}(B) = 0$$

điều này tương đương với

$$B = \text{Imf} \quad \text{hoặc} \quad B = 0.$$

Vậy Imf là mô đun đơn.

b) Do X là mô đun đơn nên ta có

$$\mathrm{Kerf} = 0 \quad \text{hay} \quad \mathrm{Kerf} = X.$$

Từ $\mathrm{Imf} \neq 0$ cho ta $\mathrm{Kerf} \neq X$ vậy $\mathrm{Kerf} = 0$ tức f là đơn cấu .

1.9. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} f : B &\longrightarrow (A + B) / A \\ b &\to b + A \end{aligned}$$

Dễ thấy f là đồng cấu. Hơn nữa nếu $(a + b) + A \in (A + B)/ A$ với $a \in A$, $b \in B$ thì $f(b) = b + A = (a + b) + A \in (A + B)/ A$ do đó f là toàn ánh. Theo định lý Noether f cảm sinh ra đẳng cấu $B/ \mathrm{Kerf} \cong (A + B) / A$, nhưng

$$\begin{aligned} \mathrm{Kerf} &= \{x \in B : f(x) = 0\} \\ &= \{x \in B : x + A = 0\} \\ &= \{x \in B : x \in A\} = A \cap B \end{aligned}$$

Do đó

$$B/_{A \cap B} \cong A + B/_{B}$$

1.10. Xét ánh xạ tự nhiên

$$\begin{aligned} \pi : X/ N &\longrightarrow X/M \\ x + N &\to x + M \end{aligned}$$

Do $N \subseteq M$ nên ánh xạ π hoàn toàn xác định, hơn nũa dễ thấy π còn là toàn cấu. Măt khác

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\pi &= \{x + N \in X/N : x + M = 0\} \\ &= \{x + N \in X/N : x \in M\} \\ &= \{x + N \in M/N\} = M/N \end{aligned}$$

Suy ra tồn tại đẳng cấu

$$(X/N)\big/(M/N) \cong X/M$$

1.11. Lấy $x \in X$, $x = h(x) + [x - h(x)]$, nhưng $h[x - h(x)] = h(x) - h^2(x) = 0$ do đó $x \in \operatorname{Imh} + \operatorname{Kerh}$ suy ra $X = \operatorname{Imh} + \operatorname{Kerh}$. Bây giờ nếu $y \in \operatorname{Imh} \bigcap \operatorname{Ker} H$, từ $y \in \operatorname{Imh}$ ắt tồn tại $z \in X$ mà $h(z) = y$. Mặt khác $y \in \operatorname{Kerh}$ nên ta có

$$0 = h(y) = h^2(z) = h(z) = y$$

Điều này chứng tỏ $\operatorname{Imh} \bigcap \operatorname{Kerh} = \{0\}$. Vậy $X = \operatorname{Imh} \oplus \operatorname{Kerh}$.

1.12. Để chứng minh $C = A \oplus B$. Ta chỉ cần chứng minh đẳng thức (2) được suy ra trực tiếp bởi hai đẳng thức còn lại. Thật vậy, từ

$$j_1p_1 + j_2p_2 = 1_C$$

$$\Rightarrow \quad p_1j_1p_1 + p_1j_2p_2 = p_11_C$$

$$\Rightarrow \quad 1_Ap_1 + p_1j_2p_2 = p_1$$

$$\Rightarrow \quad p_1j_2p_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad p_1j_2p_2j_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad p_1j_21_B = 0$$

$$\Rightarrow \quad p_1j_2 = 0$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có $p_2j_1 = 0$.

1.13.

a) Lấy $x := (x_i)_{i\in I} \in \tau(X)$, khi đó tồn tại $0 \neq \lambda \in R$ sao cho $\lambda x = (\lambda x_i)_{i\in I} = 0$ suy ra $\lambda x_i = 0$ với mọi $i \in I$, điều này cho ta $x_i \in \tau(X_i)$ với mọi $i \in I$. Vậy $x \in \sum_{i\in I} \tau(X_i)$.

Bây giờ nếu $x := (x_i) \in \sum_{i\in I} \tau(X_i)$, khi đó với mỗi $i \in I$ mà $x_i \neq 0$ tồn tại $\lambda_i \in R$ sao cho $\lambda_i x_i = 0$. Đặt

$$\lambda = \prod_{i\in I} \lambda_i$$

Vì chỉ có hữu hạn $x_i \neq 0$ nên λ hoàn toàn xác định. Rõ ràng $\lambda x_i = 0$ với mọi $i\in I$, do đó $x \in \tau(X)$.

b) Giả sử $\{X_i\}_{i\in I}$ là họ mô đun xoắn, khi đó

$$\sum_{i\in I} X_i = \sum_{i\in I} \tau(X_i) = \tau\left(\sum_{i\in I} X_i\right)$$

do đó tổng trực tiếp các mô đun xoắn là mô đun xoắn .

c) Giả sử $\{X_i\}_{i\in I}$ là họ mô đun không xoắn mà tổng trực tiếp của nó không phải là mô đun không xoắn. Khi đó tồn tại $(x_i) \in \sum X_i$ và $0 \neq \lambda \in R$ sao cho $\lambda(x_i) = (\lambda x_i) = 0$ suy ra có $j \in I$ mà $\lambda x_j = 0$, điều này mâu thuẩn với giả thiết X_j là mô đun không xoắn. Vậy ta có tổng trực tiếp họ mô đun không xoắn là mô đun không xoắn.

1.14. Lấy $(x_i) \in \delta(X)$, với mọi $0 \neq \lambda \in R$ khi đó có $(y_i) \in X$ sao cho $\lambda(y_i) = (\lambda y_i) = (x_i)$ suy ra $x_i \in \delta(X_i)$ với mọi $i \in I$, do đó $x \in \prod_{i \in I} \delta(X_i)$.

Lấy $(x_i) \in \prod \delta(X_i)$, với mọi $0 \neq \lambda \in R$. Khi đó mỗi $i \in I$ tồn tại $y_i \in X_i$ sao cho $x_i = \lambda y_i$, do đó $(x_i) = (\lambda y_i) = \lambda(y_i)$ vậy $(x_i) \in \delta(X)$. Bây giờ nếu $\{X_i\}$ là họ mô đun chia được theo chứng minh trên thì

$$\prod_{i \in I} X_i = \prod_{i \in I} \delta(X_i) = \delta(\prod_{i \in I} X_i)$$

là mô đun chia được. Do đó tích trực tiếp của họ mô đun chia được là mô đun chia được. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta nhận được tổng trực tiếp của họ mô đun chia được là mô đun chia được.

1.15.

a) Giả sử X là mô đun hữu hạn sinh và A là mô đun con của nó, gọi $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ là hệ sinh của X, khi đó mỗi $x \in X$

$$x := \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \text{ với } r_i \in R,$$

Vậy mỗi $x + A \in X/A$ thì $x + A = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i + A = \sum_{i=1}^{n} r_i(x_i + A)$, do đó tập $\{x_1 + A, x_2 + A, \ldots, x_n + A\}$ chính là hệ sinh của X/A.

b) ($\Rightarrow$) Giả sử X là tổng trực tiếp của họ $\{X_i\}_{i\in I}$, gọi tập sinh của X là

$$S := \{ \sum_{i\in I} x_{1i}, \sum_{i\in I} x_{2i}, \ldots, \sum_{i\in I} x_{ni}\}.$$

Với mọi $i \in I$ ánh xạ $\pi_i : \bigoplus_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ là toàn ánh. Mặt khác với $x \in X$, ta có

$$x = \sum_{j=1}^{n} r_j \sum_{i\in I} x_{ji} = \sum_{i\in I} \sum_{j=1}^{n} r_j x_{ji}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} r_j x_{ji}$$

Điều này chứng tỏ với mọi $i \in I$, tập $\{x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}\}$ chính là tập sinh của X_i. Hơn nữa, do các x_{ji} xuất hiện trong S chỉ có hữu hạn khác không nên hầu hết các tập sinh của các X_i đều chứa toàn phần tử 0, nói cách khác thì hầu hết các X_i bằng không.

($\Leftarrow$) Giả sử mỗi X_i hữu hạn sinh và hầu hết các X_i bằng không. Có thể giả thiết rằng các $X_i \neq \{0\}$ là $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, n$, đặt :

$$S_i = \{x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{m(i)i}\}$$

là tập sinh của X_i. Khi đó: $\forall x \in \bigoplus_{i\in I} X_i = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ được phân tích dưới dạng $x = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{k=1}^{m(i)} r_k x_{ki}$. Điều này chứng tỏ $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ là hệ sinh của tổng trực tiếp các X_i. Do S hữu hạn nên tổng trực tiếp $\bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ là hữu hạn sinh

1.16.

i) Giả sử họ $\{f_i : X_i \to Y_i : i \in I\}$ là đơn cấu, đặt $f := \bigoplus_{i\in I} f_i$, khi đó

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker} f &= \{\sum_{i\in I} J_i^X(x_i) \in \bigoplus_{i\in I} X_i : \ f[\sum_{i\in I} J_i^X(x_i)] = 0\} \\
&= \{\sum_{i\in I} J_i^X(x_i) \in \bigoplus_{i\in I} X_i : \ \sum_{i\in I} fJ_i^X(x_i) = 0\} \\
&= \{\sum_{i\in I} J_i^X(x_i) \in \bigoplus_{i\in I} X_i : \ \sum_{i\in I} J_i^Y f_i(x_i) = 0\} \\
&= \{\sum_{i\in I} J_i^X(x_i) \in \bigoplus_{i\in I} X_i : \ f_i(x_i) = 0 \text{ với mọi } i \in I\} \\
&= \{\sum_{i\in I} J_i^X(x_i) \in \bigoplus_{i\in I} X_i : \ x_i = 0 \text{ với mọi } i \in I\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Vậy f là đơn cấu .

Giả sử $\{f_i : X_i \to Y_i : i \in I\}$ là toàn cấu lấy, $\sum_{i\in I} J_i^Y(y_i) \in \bigoplus_{i\in I} Y_i$ vì mỗi $i \in I$, f_i là toàn ánh nên tồn tại $x_i \in X_i$ sao cho $f_i(x_i) = y_i$, do đó

$$\begin{aligned} f\Big[\sum_{i\in I} J_i^X(x_i)\Big] &= \sum_{i\in I} fJ_i^X(x_i) \\ &= \sum_{i\in I} J_i^Y f_i(x_i) \\ &= \sum_{i\in I} J_i^Y(y_i) \\ &= y \end{aligned}$$

suy ra f toàn cấu. Từ các chứng minh trên, nếu mỗi f_i là đẳng cấu thì $\oplus f_i$ là đẳng cấu.

ii) Giả sử $\{f_i : X_i \to Y_i : i \in I\}$ là đơn cấu, đặt $f := \prod_{i\in I} f_i$.

Khi đó

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}f &= \{(x_i) \in \prod_{i\in I} X_i : f[(x_i)_{i\in I}] = 0\} \\ &= \{(x_i) \in \prod_{i\in I} X_i : (f_i[x_i])_{i\in I} = 0\} \\ &= \{(x_i) \in \prod_{i\in I} X_i : f_i(x_i) = 0, \text{ với mọi } i\in I\} \\ &= \{(x_i) \in \prod_{i\in I} X_i : x_i = 0, \text{ với mọi } i \in I\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

Vậy f là đơn cấu . Bây giờ nếu họ $\{f_i : X_i \to Y_i\}$ là toàn ánh . Lấy $y := (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Y_i$, với mỗi $i \in I$ vì f_i là toàn ánh nên tồn tại $x_i \in X_i$ sao cho $f_i\,(x_i) = y_i$, khi đó

$$f[(x_i)_{i\in I}] = (f_i[x_i])_{i\in I} = (y_i)_{i\in I} = y$$

Vậy f là toàn cấu. Như vậy $\prod_{i\in I} f_i$ là đẳng cấu nếu họ $\{f_i : X_i \to Y_i\}$ là đẳng cấu .

1.17.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & C \arrow[r] \arrow[dl, "\varphi"] & 0 \\ & X & & \end{tikzcd}$$

Với mọi $c \in C$, chọn $b \in g^{-1}(c)$, điều này hoàn toàn xác định bởi giả thiết g là toàn ánh. Với cách chọn này, định nghĩa $\varphi : C \to X$ cho bởi $\varphi(c) = h(b)$. Nếu b_1, b_2 thuộc về $g^{-1}(c)$ thì $(b_1 - b_2) \in \mathrm{Ker}g = \mathrm{Im}f$, do đó tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b_1 - b_2$. Từ $hf = 0$, ta nhận được

$$hf(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h(b_1 - b_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h(b_1) - h(b_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h(b_1) = h(b_2)$$

Điều này chứng tỏ φ được định nghĩa tốt. Bây giờ ta chứng tỏ φ là đồng cấu.

Với mọi $c_1, c_2 \in C$, lấy $b_1 \in g^{-1}(c_1)$, $b_2 \in g^{-1}(c_2)$. Khiđó

$$g(b_1 + b_2) = g(b_1) + g(b_2) = c_1 + c_2$$

Vậy $b_1 + b_2 \in g^{-1}(c_1 + c_2)$, suy ra

$$\varphi(c_1 + c_2) = h(b_1 + b_2) = h(b_1) + h(b_2) = \varphi(c_1) + \varphi(c_2)$$

điều này chứng tỏ φ là đồng cấu.

Với mọi $b \in B$, do g là toàn cấu nên tồn tại $c \in C$ sao cho $b \in g^{-1}(c)$

vậy $\quad \varphi[g(b)] = \varphi(c) = h(b)$

suy ra $\quad \varphi g = h$.

Nếu μ là đồng cấu thoả điều kiện $\mu g = h$. Với mọi $c \in C$, chọn $b \in g^{-1}(c)$, khi đó

$$\mu(c) = \mu g(b) = h(b) = \varphi(c)$$

suy ra $\mu = \varphi$, do đó φ là duy nhất.

Cách khác : Áp dụng định lý Noether về toàn cấu và hệ quả của nó. Cho toàn cấu $g : B \to C$ và đồng cấu $h : B \to X$ ta có đẳng cấu $g' : B/Kerg \cong C$ và đơn cấu $h' : B/Kerh \to X$. Vì dòng khớp nên $Imf = Kerg$ và $B/Kerh = B/Imf$ vì $hf = 0$ nên $Imf \subseteq Kerh$, cho phép xác định đồng cấu $\theta : B/Imf \to B/Kerh$ mà $\theta(x + Imf) = x + Kerh$. Khi đó đồng cấu $\varphi : C \to X$ là sự kết hợp của ba đồng cấu

$$C \xrightarrow{g'^{-1}} B/\mathrm{Kerg} = B/\mathrm{Imf} \xrightarrow{\theta} B/\mathrm{Kerh} \xrightarrow{h'} X.$$

1.18.

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[d, "h"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

Do f là đơn ánh nên tồn tại đẳng cấu $\mu : \mathrm{Imf} \to A$ mà $\mu f = 1_A$ và $f\mu = 1_{\mathrm{Imf}}$. Theo giả thiết gh = 0, ta nhận được $\mathrm{Imh} \subseteq \mathrm{Kerg}$. Do dòng là khớp nên Imf = Kerg, vậy $\mathrm{Imh} \subseteq \mathrm{Imf}$, cho phép ta định nghĩa ánh xạ

$$\psi : X \longrightarrow A$$
$$x \to \mu h(x)$$

Vì ψ là sự kết hợp của hai đồng cấu

$$X \xrightarrow{h} \mathrm{Imf} \xrightarrow{\mu} A$$

Vậy ψ là đồng cấu. Hơn nữa, với mọi $x \in X$

$$f\psi(x) = f\mu h(x) = h(x)$$

suy ra $f\psi = h$.

Bây giờ giả sử φ là đồng cấu thoả $f\varphi = h$, khi đó với mọi $x \in X$, ta có

$$\varphi(x) = \mu f\varphi(x) = \mu h(x) = \psi(x)$$

Vậy ψ là duy nhất.

1.19.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Do g là toàn cấu nên X/ Kerg $\cong$ C.

Từ giả thiết C hữu hạn sinh nên X/ Kerg hữu hạn sinh. Mặt khác, từ dòng là khớp nên Imf = Kerg. Do đó X/ Imf hữu hạn sinh. Vì f là đơn cấu nên cảm sinh đẳng cấu từ Imf vào A, suy ra Imf hữu hạn sinh bởi A hữu hạn sinh.

Gọi $\{x_1 + \mathrm{Imf}, x_2 + \mathrm{Imf}, \ldots, x_n + \mathrm{Imf}\}$ là tập sinh của X/ Imf
$\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ là tập sinh của Imf

Khi đó với $x \in X$

$$x + \mathrm{Imf} = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) + \mathrm{Imf} \quad \text{với } r_i \in R$$

$$\Rightarrow \quad x - \left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) \in \mathrm{Imf}$$

$$\Rightarrow \quad x - \left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) = \sum_{j=1}^{m} s_j y_j \qquad \text{với } r_j \in R$$

$$\Rightarrow \quad x = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i + \sum_{j=1}^{m} s_j y_j \qquad (*)$$

Đẳng thức (*) chứng tỏ tập $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ là tập sinh của X. Vậy X hữu hạn sinh.

1.20. Trước khi chứng minh ta xét bổ đề sau.

Bổ đề : Cho X là R-mô đun và A là mô đun con của nó, khi đó

a) Nếu X/ A và A hữu hạn sinh thì X hữu hạn sinh.

b) Nếu X hữu hạn sinh thì X/A hữu hạn sinh.

Chứng minh

a) Tương tự cách chứng minh bài 1.19.

b) Gọi $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ là tập sinh của X, với $x \in X$

$$x := \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \quad \text{với } r_i \in R$$

$$\Rightarrow \quad x + A = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) + A = \sum_{i=1}^{n} r_i (x_i + A)$$

Do đó tập $\{x_1 + A, x_2 + A, \ldots, x_n + A\}$ là tập sinh của X/ A, vậy X/A là hữu hạn sinh (đpcm).

Bây giờ theo (b) thì $(X_1 + X_2)/ X_2$ hữu hạn sinh. Từ

$$X_1 + X_2 \big/ X_2 \cong X_1 \big/ X_1 \cap X_2$$

nên $X_1/(X_1 + X_2)$ hữu hạn sinh. Áp dụng (a) cho $X_1/(X_1 \cap X_2)$ và $X_1 \cap X_2$ ta nhận được X_1 hữu hạn sinh. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có X_2 hữu hạn sinh.

1.21.

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & \\
& & Y \arrow[d, "\beta"'] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] & A \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"] & X' \\
& & Y' &
\end{tikzcd}$$

($\Rightarrow$) Giả sử $\alpha'\beta$ là đơn cấu . Lấy $x \in \mathrm{Ker}\beta'\alpha$, khi đó

$$\beta'\alpha\,(x) = 0.$$

Suy ra $\alpha(x)$ nằm trong $\mathrm{Ker}\beta'$.

Do cột khớp nên $\mathrm{Ker}\beta' = \mathrm{Im}\beta$, ắt tồn tại $y \in Y$ sao cho $\beta(y) = \alpha(x)$, điều này dẫn tới $\alpha'\beta(y) = \alpha'\alpha\,(y) = 0$ bởi dòng là khớp.

Với giả thiết $\alpha'\beta$ là đơn ánh ta có $y = 0$, vậy

$$\alpha\,(x) = \beta(y) = 0.$$

Mặt khác α là đơn ánh nên ta nhận được $x = 0$, vì vậy

$$\mathrm{Ker}\beta'\alpha = \{0\}$$

tức $\beta'\alpha$ là đơn cấu.

($\Leftarrow$) Giả sử $\beta'\alpha$ là đơn cấu . Lấy $y \in \mathrm{Ker}\alpha\beta'$, khi đó

$$\alpha'\beta(y) = 0$$

suy ra $\beta(y)$ nằm trong $\mathrm{Ker}\alpha'$.

Từ dòng là khớp ta có $\mathrm{Ker}\alpha' = \mathrm{Im}\alpha$ vậy tồn tại $x \in X$ sao cho $\alpha(x) = \beta(y)$ điều này dẫn đến

$$\beta'\alpha\,(x) = \beta'\beta\,(y) = 0.$$

Từ $\beta'\alpha$ là đơn cấu ta có $x = 0$, do đó $\beta(y) = \alpha(x) = 0$. Do β là đơn cấu nên $y = 0$, vì vậy $\mathrm{Ker}\alpha'\beta = 0$ tức $\alpha'\beta$ là đơn cấu.

Cách khác: Do dòng khớp ta có α đơn cấu và $\mathrm{Im}\alpha = \mathrm{Ker}\alpha'$. Do cột là khớp ta có β đơn cấu và $\mathrm{Im}\beta = \mathrm{Ker}\,\beta'$.

Ta có: $\alpha'\beta \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\alpha'\beta = \beta^{-1}(\mathrm{Ker}\alpha') = \{0\}$;

$\Leftrightarrow \mathrm{Im}\beta \bigcap \mathrm{Ker}\alpha' = \{0\}$ (do β đơn cấu)

$\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\beta' \bigcap \mathrm{Im}\alpha' = \{0\}$

$\Leftrightarrow \alpha^{-1}(\mathrm{Ker}\beta') = \{0\}$ {do α đơn cấu }

$\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\beta'\alpha = \{0\}$

$\Leftrightarrow \beta'\alpha$ đơn cấu.

1.22.

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "\beta"] & & \\
X \arrow[r, "\alpha"] & A \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"] & X' \arrow[r] & 0 \\
 & Y' \arrow[d] & & \\
 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

($\Rightarrow$) Giả sử $\beta'\alpha$ là toàn cấu. Lấy $x' \in X'$, khi đó có $a \in A$ mà $\alpha'(a) = x'$. Từ β' là toàn ánh ắt tồn tại $x \in X$ sao cho

$$\beta'\alpha\,(x) = \beta'(a)$$

$$\Rightarrow \quad \beta'\,[a - \alpha(x)] = 0$$

$$\Rightarrow \quad a - \alpha(x) \in \mathrm{Ker}\beta' = \mathrm{Im}\beta$$

Vì vậy có $y \in Y$ mà $\beta(y) = a - \alpha(x)$

$$\Rightarrow \ \alpha'\beta(y) = \alpha'[a - \alpha(x)] = \alpha'(a) - \alpha'\alpha(x) = \alpha'(a) = x'$$

điều này chứng tỏ $\alpha'\beta$ là toàn cấu.

($\Leftarrow$) Giả sử $\alpha'\beta$ là toàn cấu. Lấy $y' \in Y'$, khi đó có $a \in A$ mà $\beta'(a) = y'$. Từ $\beta'\alpha$ là toàn ánh nên tồn tại $y \in Y$ sao cho

$$\alpha'\beta(y) = \alpha'(a) \Rightarrow \quad \alpha'[a - \beta(y)] = 0$$

$$\Rightarrow \quad a - \beta(y) \in \mathrm{Ker}\alpha' = \mathrm{Im}\alpha$$

Vì vậy có $x \in X$ mà $\alpha(x) = a - \beta(y)$

$$\Rightarrow \ \beta'\alpha(x) = \beta'[a - \beta(y)] = \beta'(a) - \beta'\beta(y) = \beta'(a) = y$$

Điều này chứng tỏ $\beta'\alpha$ là toàn cấu.

Cách khác:

Do dòng khớp ta có: α' toàn cấu và $\mathrm{Im}\alpha = \mathrm{Ker}\alpha'$

Do cột khớp ta có: β' toàn cấu và $\mathrm{Im}\beta = \mathrm{Ker}\beta'$.

Khi đó :$\beta'\alpha$ toàn cấu $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\alpha + \mathrm{Ker}\beta' = A$ (do β' toàn cấu)

$\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\alpha' + \mathrm{Im}\beta = A$

$\Leftrightarrow \alpha'\beta$ toàn cấu (do α' toàn cấu) .

1.23.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B_1 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\beta_3"'] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_5"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\beta_2"'] & B_2 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "\beta_4"'] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_6"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r, "\alpha_5"] \arrow[d] & B_3 \arrow[r, "\alpha_6"] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

(i) Giả sử dòng (1) và dòng (2) khớp. Áp dụng bổ đề 4 ngắn cho biểu đồ con sau.

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[r, "\beta_3"] \arrow[d, "\alpha_2"] & B_2 \arrow[r, "\beta_4"] \arrow[d, "\alpha_4"] & B_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_6"] & 0 \arrow[d] \\
C_1 \arrow[r, "\beta_5"] & C_2 \arrow[r, "\beta_6"] & C_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\alpha_6 &= \beta_4(\mathrm{Ker}\alpha_4) = \beta_4(\mathrm{Im}\alpha_3) = \beta_4\alpha_3(A_2) \\
&= \alpha_5\beta_2(A_2) \quad \text{(tính giao boán cùa biểu đồ)} \\
&= \alpha_5(A_3) \quad (\beta_2 \text{ toàn ánh}) \\
&= \mathrm{Im}\alpha_5
\end{aligned}$$

do đó dòng (3) khớp tại B_3.

Tính khớp dòng (3) tại C_3 tương đương với α_6 toàn cấu. Tuy nhiên do α_4, β_6 toàn cấu mà $\alpha_6\beta_4 = \beta_6\alpha_4$ toàn cấu, suy ra α_6 toàn cấu. Tính khớp tại A_3 có nghĩa α_5 đơn cấu, được chỉ ra trong phép săn trên biểu đồ:

$$\begin{array}{ccccc}
 & \alpha_1 & & \alpha_2 & \\
a_1 & \rightarrow & b1 & \rightarrow & 0 \\
\downarrow\beta_1 & & \downarrow\beta_3 & & \downarrow\beta_5 \\
a_2 & \rightarrow & \alpha_3(a_2) & \rightarrow & 0 \\
\downarrow\beta_2 & & \downarrow\beta_4 & & \\
a_3 & \rightarrow & 0 \in B_3 & & \\
 & \alpha_5 & & &
\end{array}$$

Lấy $a_3 \in \mathrm{Ker}\alpha_5$. Do β_2 toàn cấu $\Rightarrow \exists a_2 \in A_2 : \beta_2(a_2) = a_3$.

Vì $\beta_4\alpha_3(a_2) = \alpha_5\beta_2(a_2) = \alpha_5(a_3)$

$\Rightarrow \alpha_3(a_2) \in \mathrm{Ker}\beta_4 = \mathrm{Im}\beta_3 \Rightarrow \exists b_1 \in B_1$ mà $\beta_3(b_1) = \alpha_3(a_2)$.

Vì $\beta_5\alpha_2(b_1) = \alpha_4\beta_3(b_1) = \alpha_4\alpha_3(a_2 = 0$ và β_5 đơn cấu $\Rightarrow \alpha_2(b_1) = 0$ $\Rightarrow \alpha_2(b_1) = 0 \Rightarrow b_1 \in Ker\alpha_2 = Im\alpha_1 \Rightarrow \exists a_1 \in A_1$: $\alpha_1(a_1) = b_1$. Vì $\beta_3\alpha_1(a_1) = \alpha_3\beta_1(a_1) = \alpha_3(a_2)$ và α_2 đơn cấu $\Rightarrow \beta_1(a_1) = a_2 \Rightarrow a_3 = \beta_2(a_2) = \beta_2\beta_1(a_1) = 0$, vậy: $Ker\alpha_5 = 0$ tức α_5 đơn cấu.

Trường hợp dòng (2) .Giả sử dòng (1) và dòng (2) , dòng (3) khớp được chứng minh hoàn toàn tương tự như trên.

Giả sử dòng 3, dòng 1 khớp và dòng hai là nữa khớp ta chứng minh dòng hai khớp.

- Áp dụng bổ đề năm ngắn cho 0, α_1, α_3, α_5, 0 ta có α_3 là đơn cấu.
- Áp dụng bổ đề năm ngắn cho 0, α_2, α_4, α_6 ta có α_4 là toàn cấu.

do $\alpha_4\alpha_3 = 0$ nên $Im\alpha_3 \subseteq Ker\alpha_4$. Ta chứng minh $Ker\alpha_4 \subseteq Im\alpha_3$. Thật vậy lấy $b_2 \in Ker\alpha_4$, khi đó :

$$\alpha_6\beta_4(b_2) = \beta_6\alpha_4(b_2) = 0$$

Suy ra $\beta_4(b_2) \in Ker\alpha_6 = Im\alpha_5$ vậy có $a_3 \in A_3$ sao cho $\alpha_5(a_3) = \beta_4(b_2)$. Bởi β_2 là toàn cấu ắt tồn tại $a_2 \in A_2$ sao cho $\beta_2(a) = a_2$. Vậy

$$\beta_4\alpha_3(a_2) = \alpha_5\beta_2(a_2) = \alpha_5(a_2) = \beta_2(b_2)$$

$\Rightarrow \beta_4(\alpha_3(a_2) - b_2) = 0$ tức $(\alpha_3(a_2) - b_2) \in Ker\beta_4 = Im\beta_3$ suy ra có $b_1 \in B_1$ mà $\beta_3(b_1) = \alpha_3(a_2) - b_2$. Mặt khác:

$$\beta_5\alpha_2(b_1) = \alpha_4\beta_3(b_1) = \alpha_4(\alpha_3(a_2) - b_2) = 0.$$

Bởi β_5 đơn cấu nên $\alpha_2(b_1) = 0$ tức $b_1 \in Ker\alpha_2 = Im\alpha_1$. Vậy có $a_1 \in X$ mà $\alpha_1(a_1) = b_1$. Đặt $a' = a_2 - \beta_1(a_1) \in A_2$. Khi đó:

$$\alpha_3(a') = \alpha_3(a_2 - \beta_1(a_1))$$

$$= \alpha_3(a_2) - \alpha_3\beta_1(a_1)$$

$$= \alpha_3(a_2) - \beta_3\alpha_1(a_1)$$

$$= \alpha_3(a_2) - \beta_3(b_1)$$

$$= \alpha_3(a_2) - (\alpha_3(a_2) - b_2)$$

$$= b_2$$

Điều này chứng tỏ $b_2 \in \mathrm{Im}\alpha_3$. Vậy $\mathrm{Ker}\alpha_4 \subseteq \mathrm{Im}\alpha_3$.

1.24.

$$0 \longrightarrow X_2 / X_1 \cap X_2 \xrightarrow{\varphi} X / X_1 \xrightarrow{\psi} X / X_1 + X_2 \longrightarrow 0$$

Từ $X_1 \cap X_2 \subseteq X_1 \subseteq X_1 + X_2$, ta có φ và ψ xác định. ψ hiển nhiên là toàn ánh . Hơn nữa

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{x_2 + X_1 \cap X_2 : x_2 \in X_2, \varphi(x_2 + X_1 \cap X_2) = 0\}$$

$$= \{x_2 + X_1 \cap X_2 : x_2 \in X_2, x_2 + X_1 = 0\}$$

$$= \{x_2 + X_1 \cap X_2 : x_2 \in X_2, x_2 \in X_1\}$$

$$= \{x_2 + X_1 \cap X_2 : x_2 \in X_1 \cap X_2\}$$

$$= 0$$

Vậy φ đơn ánh.

Với mọi $x_2 \in X_2$, ta có

$$\psi\varphi\,(x_2 + X_1 \cap X_2) = \psi(x_2 + X_1) = x_2 + (X_1 + X_2) = 0$$

do đó $\mathrm{Im}\varphi \subseteq \mathrm{Ker}\psi$.

Để thấy bao hàm ngược, lấy $x + X_1 \in \mathrm{Ker}\psi$. Khi đó

$$\psi(x + X_1) = x + (X_1 + X_2) = 0$$

$$\Rightarrow\ x \in X_1 + X_2$$

$$\Rightarrow\ x = y_1 + y_2 \quad \text{với } y_1 \in X_1,\ y_2 \in X_2$$

$$\Rightarrow\ x + X_1 = y_2 + y_1 + X_1 = y_2 + X_1$$

Bây giờ với $y_2 + (X_1 \cap X_2) \in X_2 / (X_1 \cap X_2)$, ta có

$$\varphi(y_2 + X_1 \cap X_2) = y_2 + X_1 = x + X_1$$

suy ra $x + X_1 \in \mathrm{Im}\varphi$. Điều này chứng tỏ $\mathrm{Ker}\psi \subseteq \mathrm{Im}\varphi$ (đpcm).

1.25. Gọi $S := \{y_i + A\}_{i\in I}$ là cơ sở của X/A. Với mọi $i \in I$ chọn cố định phần tử đại diện $x_i \in y_i + A$. Đặt

$$B := <\{x_i : i \in I\}>$$

là mô đun con của X, khi đó ta có $X = A + B$. Nếu $x \in A \cap B$ thì

$$x := \Big(\sum_{i\in I} r_i\, x_i\Big) \in A, \text{ với } r_i \in R$$

$$\Rightarrow\ \Big(\sum_{i\in I} r_i\, x_i\Big) + A = \sum_{i\in I} r_i\,(x_i + A) = 0$$

do $(x_i + A)_{i\in I}$ là cơ sở của X/A nên $r_i = 0$, với mọi $i \in I$. Suy ra

$$x = \sum_{i\in I} r_i x_i = 0.$$

Vậy $X = A \oplus B$ (đpcm).

Cách khác: Mô đun con A của mô đun X là hạng tử trực tiếp của X $\Leftrightarrow$ dãy khớp chẻ ra .

$$0 \to A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X/A \to 0$$

$\Leftrightarrow$ toàn cấu $p: X \to X/A$ có nghịch đảo phải $\mu: X/A \to X$. Tuy nhiên vì X/A là mô đun tự do với cơ sở $S = \{y_i + A : i\in I\}$ nên đồng cấu $\mu: X/A \to X$ mà $\mu(y_i + A) = y_i \in X$, với mọi $i\in I$ thoả: $p\mu$ là ánh xạ đồng nhất trên tập cơ sở S tức $p\mu$ là đồng cấu đồng nhất $1_{X/A} \Rightarrow \mu$ là nghịch đảo phải của p.

1.26. Ta có Imf là mô đun con của Y mà Y lại là mô đun tự do trên vành chính nên Imf là mô đun tự do. Mặt khác X/Kerf $\cong$ Imf do đó X/Kerf cũng là mô đun tự do . Theo bài tập (1.25) thì Kerf là hạng tử trực tiếp của X. Vì vậy dãy khớp ngắn sau chẻ ra

$$0 \longrightarrow \mathrm{Kerf} \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} X/\mathrm{Kerf} \longrightarrow 0$$

trong đó i là phép nhúng và π là phép chiếu tự nhiên, dãy trên chẻ ra cho ta

$$X \cong \mathrm{Kerf} \oplus X/\mathrm{Kerf} \cong \mathrm{Kerf} \oplus \mathrm{Imf}$$

1.27. Gọi $\{x_i : i \in I\}$ là cơ sở của X. Giả sử $0 \neq \lambda \in R$ và $x := \sum_{i\in I} r_i x_i \in X$ với $r_i \in R$ thoả $\lambda x = \sum_{i\in I} \lambda r_i x_i = 0$, khi đó $\lambda r_i = 0$, với mọi $i \in I$. Từ $\lambda \neq 0$ và R là miền nguyên ta có $r_i = 0$ với mọi i $\in$ I. Vì vậy $x = \sum_{i\in I} r_i x_i = 0$ do đó X là mô đun không xoắn, điều ngược lại không hoàn toàn đúng. Xét nhóm cộng $\mathbb{Q}$ như là $\mathbb{Z}$-mô đun, khi đó $\mathbb{Q}$ là mô đun không xoắn nhưng không là mô đun tự do.

1.28. Lấy e là phần tử trong cơ sở của M, nếu r, s$\in$ R, rs = 0 xét phần tử r(s.e) = 0.

1.29. Để ý $N_i \cap \bigoplus_{i\neq j} M_j = 0$.

1.30. Chiều thuận dùng định nghĩa tổng trực tiếp trong. Cho chiều đảo đặt $M_i = \pi_i(M)$ với mọi i$\in$ I.

1.31. Xét dãy đồng cấu

$$M/N \xrightarrow{\pi} M/\mathrm{Kerf} \xrightarrow{h} \mathrm{Imf} \xrightarrow{i} M'$$

Với π là ánh xạ tự nhiên, h là đẳng cấu Noether, i là phép nhúng.

1.32. Xét $\mathbb{Z}$ - đẳng cấu f : $\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ cho bởi f(z) = 2z, $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ không đẳng cấu với $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1.33. Đặt A :={m - gf(m) : m$\in$M}, B := {gf(m) : m$\in$ M}. Chứng minh M = A $\oplus$ B. Để ý g là đơn cấu và g(N) là hạng tử trực tiếp của M.

1.34. Xét dãy đồng cấu

$$X_j \xrightarrow{j} \bigoplus_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{j=1}^{m} Y_j \xrightarrow{\pi_i} Y_i$$

với j_i là phép nhúng và π_j là phép chiếu, đặt $\varphi_{ij} = \pi_i \varphi j$.

1.35. Gọi B là cơ sở của M. Xét $\varphi : Hom(M, M) \to M_n(R)$ với $\varphi(f) = [f]_B$ với $[f]_B$ là ma trận biểu diễn qua cơ cở.

1.36. Áp dụng định lý tính phổ dụng của tổng trực tiếp và tích trực tiếp.

1.37. Dùng quy nạp toán học.

1.38. i) Dùng định nghĩa.

ii) Xét $\varphi : D \to Hom_R(M, M)$ cho bởi $\varphi(d) = \sigma_d$, trong đó $\sigma_d(m) = dm$ với mọi $m \in M$.

1.39. ($i \Rightarrow ii$) Gọi $\{a_i\}_{i\in I}$ là tập sinh của M. Giả sử $\{a_i\}_{i\in I}$ vô hạn. Với mọi $n \in$, gọi $M_n = \sum_{i=1}^{n} Ra_i$. Xét dây chuyền tiến

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots$$

($ii \Rightarrow iii$) Giả sử (iii) sai, xét tập không rỗng các mô đun con của M mà không có phần tử tối đại. Dùng quy nạp toán học thiết lập một chuyền các mô đun con của M, M_1 M_2 . . . M_n . . . đặt $N := \bigcup M_i$ chứng minh N không hữu hạn sinh.

($iii \Rightarrow$ i) Dùng phản chứng.

1.40. Tương tự bài tập 1.39.

1.41. Gọi $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ là tập sinh của M, nếu $N \updownarrow M$, với $x \in N$ viết $x = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i$, đặt I là tập tất cảcác r_i xuất hiện trong tổng của x chứng minh I là iđêan. Gọi $\{s_1, s_2, \dots, s_t\}$ là tập sinh của I, với mọi $1 \le i \le t$, chọn $x_i \in N$ mà s_i xuất hiện trong tổng của nó . Đặt $M' := Ra_2 + \dots + Ra_n$, chứng minh $M' \cap N$ hữu hạn sinh và $N = Rx_1 + Rx_2 + \dots + Rx_t + (M' \cap N)$.

1.42. ($\Rightarrow$) Áp dụng bài 1.39.

($\Leftarrow$) Gọi K là mô đun con của M, khi đó K/N là hữu hạn sinh. Áp dụng bổ đề trong chứng minh bài tập 1.20.

1.43. Để ý Imf và M/Imf là các mô đun Noether, áp dụng bài tập 1.42.

1.44. i) Xét dãy $\dots \subseteq f^n(M) \subseteq \dots \subseteq f^2(M) \subseteq f(M)$.

ii) Xét dãy $f^{-1}(0) \subseteq f^{-2}(M) \subseteq \dots \subseteq f^{-n}(M) \subseteq \dots$.

1.45. i) Xét nhóm cộng $\mathbb{Z}$.

ii) Xét $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \left\{ \frac{m}{p^i} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} : m \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N} \right\}$ với p là số nguyên tố cho trước.

1.46. Áp dụng bài tập 1.42 và quy nạp toán học.

1.47. Áp dụng bài tập 1.19.

1.48. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}(1, 0) \oplus \mathbb{R}(0, 1) = \mathbb{R}(1, 0) \oplus \mathbb{R}(1, 1)$.

CHƯƠNG II

2.1.

Bổ đề 1.

Cho mô đun Y và họ mô đun $\{X_i\}_{i\in I}$, khi đó

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_{i\in I} X_i, Y) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(X_i, Y)$$

Chứng minh.

Với mọi $i\in I$, với mọi $f \in \mathrm{Hom}(\bigoplus_{i\in I} X_i, Y)$, gọi j_i là phép nhúng từ X_i vào $\bigoplus_{i\in I} X_i$. Xét dãy đồng cấu

$$X_i \xrightarrow{j_i} \bigoplus_{i\in I} X_i \xrightarrow{f} Y$$

khi đó rõ ràng $fj_i \in \mathrm{Hom}(X_i, Y)$. Bây giờ ta định nghĩa

$$\varphi : \mathrm{Hom}(\bigoplus_{i\in I} X_i, Y) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(X_i, Y)$$

$$f \to (fj_i)_{i\in I}$$

Với mọi $f,g \in \mathrm{Hom}(\bigoplus_{i\in I} X_i, Y)$, ta có

$$\varphi(f+g) = [(f+g)j_i]_{i\in I}$$

$$= (fj_i)_{i\in I} + (gj_i)_{i\in I}$$

$$= \varphi(f) + \varphi(g).$$

vậy φ là đồng cấu.

Để thấy φ là đẳng cấu, lấy $(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Hom(X_i, Y)$. Khi đó, ta có họ $\{f_i : X_i \to Y\}$. Theo định lý tính phổ dụng của tổng trực tiếp tồn tại duy nhất đồng cấu f từ $\bigoplus_{i\in I} X_i$ vào Y thoả $fj_i = f_i$ với mọi $i\in I$, do đó

$$\varphi(f) = (fj_i)_{i\in I} = (f_i)_{i\in I}$$

vậy φ là toàn ánh, hơn nữa từ sự duy nhất của f nên φ là đẳng cấu.

Bổ đề 2.

Cho mô đun X và họ mô đun $\{Y_j\}_{j\in J}$, khi đó

$$Hom(X, \prod_{j\in J} Y_j) \cong \prod_{j\in J} Hom(X, Y_j)$$

Chứng minh.

Với mọi $j\in J$, với mọi $f \in Hom(X, \prod_{j\in J} Y_i)$, gọi π_j là phép chiếu từ $\prod_{j\in J} Y_j$ vào Y_j . Xét dãy đồng cấu

$$X \xrightarrow{f} \prod_{j\in J} Y_j \xrightarrow{\pi_j} Y_j$$

khi đó rõ ràng $\pi_j f \in Hom(X, Y_j)$. Bây giờ ta định nghĩa

$$\sigma : Hom(X, \prod_{j\in J} Y_j) \longrightarrow \prod_{j\in J} Hom(X, Y_j)$$

$$f \to (\pi_j f)_{j\in J}$$

Với mọi f, g $\in Hom(X, \prod_{j\in J} Y_j)$, Ta có

$$\begin{aligned} \sigma(f+g) &= [\pi_j(f+g)]_{j\in J} \\ &= (\pi_j f)_{j\in J} + (\pi_j g)_{j\in J} \\ &= \sigma(f) + \sigma(g). \end{aligned}$$

vậy σ là đồng cấu.

Để thấy σ là đẳng cấu, lấy $(f_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} Hom(X, Y_j)$ khi đó ta có họ $\{f_j : X \to Y_j\}$. Theo định lý tính phổ dụng của tích trực tiếp tồn tại duy nhất đồng cấu f từ X vào $\prod_{j\in J} Y_j$ thoả mãn $\pi_j f = f_j$ với mọi $j\in J$, do đó

$$\sigma(f) = (\pi_j f)_{j\in J} = (f_i)_{i\in I}$$

vậy σ là toàn ánh, hơn nữa từ sự duy nhất của f nên σ là đẳng cấu.

Áp dụng bổ đề (1) và bổ đề (2) cho bài toán ta có

$$Hom(\bigoplus_{i\in I} X_i, \prod_{j\in J} Y_j) \cong \prod_{i\in I} Hom(X_i, \prod_{j\in J} Y_j)$$

$$\cong \prod_{i\in I}\prod_{j\in J}(X_i, Y_j)$$

$$\cong \prod_{(i,j)\in I\times J}(X_i, Y_j)$$

2.2. a) Xét ánh xạ

$$\varphi : \mathrm{Hom}(R, X) \longrightarrow (X, +)$$
$$f \to f(1).$$

Với mọi $r \in R$, $f, g \in \mathrm{Hom}(R, X)$, ta có

$$\varphi(f + g) = (f + g)(1) = f(1) + g(1) = \varphi(f) + \varphi(g)$$

$$\varphi(rf) = rf(1) = r\varphi(f)$$

Vậy φ là đồng cấu .

Lấy $f \in \mathrm{Ker}f$, khi đó $\varphi(f) = f(1) = 0$ suy ra với mọi $r \in R$

$$f(r) = f(r.1) = r\,f(1) = 0$$

tức $f = 0$. Do đó $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$ hay φ là đơn cấu.

Để thấy φ là toàn cấu lấy $x \in X$, xét ánh xạ

$$f : R \longrightarrow X$$
$$r \to rx$$

Dễ thấy $f \in \mathrm{Hom}(R, X)$ hơn nữa $f(1) = 1.x = x$, điều này cho ta φ là toàn cấu hay $\mathrm{Hom}(R, X) \cong (X, +)$.

b) Ta có $F(S) \cong \bigoplus\limits_{s\in S} R_s$

$$\Rightarrow \operatorname{Hom}(F(S), X) \cong \operatorname{Hom}\Big(\bigoplus_{s\in S} R_s, X\Big)$$

$$\cong \prod_{s\in S} \operatorname{Hom}(R, X) \text{ (bài tập 4.1)}$$

$$\cong \prod_{s\in S} (X, +) \text{ (theo (a)).}$$

2.3.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "h"] & \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Từ gh = 0 cho ta Imh $\subseteq$ Kerg, do dòng là khớp nên Imf = Kerg vậy Imh $\subseteq$ Imf. Định nghĩa $h_1 : P \to$ Imf cho bởi $h_1(x) = h(x)$. h_1 hoàn toàn xác định từ Imh $\subseteq$ Imf, hơn nữa dễ thấy h_1 là đồng cấu.

Gọi f_1 là toàn cấu từ A lên Imf cho bởi $f_1(a) = f(a)$ với mọi a $\in$ A. Xét biểu đồ sau

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "h_1"] & \\ A \arrow[r, "f_1"] & \mathrm{Imf} \arrow[r, "0"] & 0 \end{tikzcd}$$

Do P xạ ảnh tồn tại đồng cấu φ từ P vào A thoả $f_1\varphi = h_1$.
Với mọi x $\in$ P, ta có

$$f[\varphi(a)] = f_1[\varphi(a)] = h_1(a) = h(a)$$

vậy $f\varphi = h$.

Đồng cấu φ chính là đồng cấu phải tìm.

2.4.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\psi"] & X \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\alpha"] & H \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Định nghĩa đồng cấu $\psi = \alpha h$. Từ tính giao hoán của hình vuông bên phải ta có $g\psi = g\alpha h = \beta kh = 0$

Xét biểu đồ

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "\psi"] & \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Trong biểu đồ (*), ta có $g\psi = 0$ và dòng là khớp. Áp dụng bài tập 2.3 , tồn tại đồng cấu $\varphi : P \to A$ sao cho

$$f\varphi = \psi = \alpha h$$

đồng cấu φ chính là đồng cấu cần tìm.

2.5. Do P xạ ảnh nên tồn tại mô đun tự do $X = A \oplus B$, trong đó $A \cong P$. Gọi f là đẳng cấu từ A vào P và $Y := P \oplus B$. Định nghĩa ánh xạ

$$\varphi := A \oplus B \longrightarrow P \oplus B$$
$$(a,b) \to (f(a), b)$$

Từ f là đẳng cấu ta có φ là đẳng cấu, hơn nữa do X là mô đun tự do nên Y cũng là mô đun tự do. Áp dụng bài tập (1.27) ta nhận được Y là mô đun không xoắn. Bởi P là mô đun con của Y nên theo bài tập 1.4 thì P là mô đun không xoắn .

Chiều ngược lại không hoàn toàn đúng. Xét $\mathbb{Q}$ là $\mathbb{Z}$-mô đun không xoắn nhưng không là mô đun tự do, mặt khác $\mathbb{Z}$ là vành chính nên không xạ ảnh.

2.6.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "æ"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & Y \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & P_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\beta_2"'] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_3"] \arrow[dl, "\varphi"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Giả sử cột (1) và cột (2) khớp và

$$
0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0
$$

là dãy khớp ngắn ra. Đặt

$$Y := \mathrm{Im}\alpha_1 \times V, \quad P_2 := P_1 \times P_3$$

từ P_1 và P_3 xạ ảnh ta có P_2 xạ ảnh, các đồng cấu α_1, β_1, α_3, β_3, f, g đã được xác định, các đồng cấu còn lại được định nghĩa như sau (xem trong biểu đồ).

- $\forall x \in X$, $æ(x) = \alpha_1(x)$.
- σ là phép chiếu từ Y xuống V.
- i_1 là phép nhúng từ P_1 vào P_2 .
- π_2 là phép chiếu từ P_2 vào P_3.
- α_2 được định bởi

$$\alpha_2(u, v) = (u, \alpha_3(v)), \quad \forall (u, v) \in Y$$

- Từ g là toàn cấu và P_3 xạ ảnh, nên tồn tại đồng cấu φ đi từ C vào B thoả $g\varphi = \beta_3$. Đồng cấu β_2 được định bởi

$$\forall (a,b) \in P_2, \ \beta_2(a, b) = f\beta_1(a) + \varphi(b).$$

Từ các định nghĩa trên dễ dàng ta thấy được dòng (1), dòng (2) và dòng (3) khớp, ta chỉ cần kiểm tra cột (2) khớp và biểu đồ giao hoán từng ô vuông.

-Với mọi $x \in X$, ta có

$$\begin{aligned} \alpha_2 æ(x) &= \alpha_2[\alpha_1(x), 0] \\ &= [\alpha_1(x), \alpha_3(0)] \\ &= [\alpha_1(x), 0] \end{aligned}$$

$= i_1\alpha_1(x)$

$\Rightarrow \quad \alpha_2æ = i_1\alpha_1$

Với mọi $(x, v) \in Y$, ta có

$\alpha_3\sigma(x, v) = \alpha_3(v)$

$= \pi_2(x, \alpha_3(v))$

$= \pi_2\alpha_2(x, v)$

$\Rightarrow \quad \alpha_3\sigma = \pi_2\alpha_2$

Với mọi $a \in P_1$, ta có

$\beta_2 i_1(a) = \beta_2(a, 0)$

$= f\beta_1(a) + \varphi(0)$

$= f\beta_1(a)$

$\Rightarrow \beta_2 i_2 = f\beta_1$

Với mọi $(a, b) \in P_2$, ta có

$g\beta_2(a, b) = gf\beta_1(a) + g\varphi(b)$

$= \beta_3(b)$

$= \beta_3\pi_2(a, b)$

$\Rightarrow \quad g\beta_2 = \beta_3\pi_2$

Vậy tất cả ô vuông đều giao hoán .

Từ α_1, α_3 là đơn cấu và β_1, β_3 là toàn cấu theo bổ đề 5 ngắn, ta có α_2 là đơn cấu và β_2 là toàn cấu.

Để ý, nếu gọi i_2 là phép nhúng P_3 vào P_2 thì $\varphi = \beta_2 i_2$, suy ra $\mathrm{Im} f\beta_1 \cap \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Im}\beta_2 i_1 \cap \mathrm{Im}\beta_2 i_2 = 0$. Mặt khác, $\mathrm{Ker}\beta_3 = \varphi^{-1}(\mathrm{Ker} g)$ nhưng $\mathrm{Ker} g = \mathrm{Im} f\beta_1$, nên $\varphi^{-1}(\mathrm{Ker} g) = \varphi^{-1}(0) = \mathrm{Ker}\varphi$. Do đó $\mathrm{Im}\alpha_3 = \mathrm{Ker}\beta_3 = \mathrm{Ker}\varphi$. Như vậy với $(u, v) \in Y$, ta có

$$\beta_2\alpha_2(u, v) = \beta_2(u, \alpha_3(v)) = f\beta_1(u) + \varphi\alpha_3(v) = 0 + 0 = 0$$

Bây giờ nếu $(a, b) \in \mathrm{Ker}\beta_2$ thì $\beta_2(a, b) = f\beta_1(a) + \varphi(b) = 0$, do $\mathrm{Im} f\beta_1 \cap \mathrm{Im}\varphi = 0$ nên ta nhận được $f\beta_1(a) = 0 = \varphi(b)$. Từ f đơn cấu nên $\beta_1(a) = 0$ suy ra $a \in \mathrm{Im}\alpha_1$, mặt khác $\mathrm{Im}\alpha_3 = \mathrm{Ker}\varphi$ do đó $b \in \mathrm{Im}\alpha_3$. Lấy $x \in X$, $v \in V$ sao cho $\alpha_1(x) = a$ và $\alpha_3(v) = b$, khi đó

$$(\alpha_1(x), v) \in Y \text{ và } \alpha_2(\alpha_1(x), v) = (a, b)$$

điều này chứng tỏ cột (2) khớp.

Cách khác: Sử dụng lại biểu đồ với hai cột biên đã chọn là các cột khớp :

$$0 \to X \xrightarrow{\alpha_1} P_1 \xrightarrow{\beta_1} A \to 0$$

$$0 \to V \xrightarrow{\alpha_3} P_3 \xrightarrow{\beta_3} C \to 0$$

Chọn $P_1 = P_2 \oplus P_3$, ta được dòng khớp:

$$0 \to P_1 \xrightarrow{i_1} P_1 \oplus P_3 \xrightarrow{\pi_2} P_3 \to 0$$

Xây dựng đồng cấu $\beta_2 : P_2 \oplus P_3 \to B$ như cách trên ta được biểu đồ giao hoán với hai dòng khớp:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & P_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\beta_2"'] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Không mấy khó khăn để kiểm tra dãy ker của biểu đồ trên $0 \to X \cong \mathrm{Ker}\beta_1 \to \mathrm{Ker}\beta_2 \to \mathrm{Ker}\beta_3 \cong V \to 0$ là khớp và là dãy trên cùng của biểu đồ 3×3 cần tìm.

2.7. Xét biểu đồ

$$\begin{tikzcd}
B/\mathrm{Imf} = B/\mathrm{Kerg} \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h'"'] & \mathrm{Img} \arrow[r, "j"] \arrow[dl, "\varphi'"] & C \arrow[dll, "\varphi"] \\
J & &
\end{tikzcd}$$

Vì dòng 2 là khớp nên Imf = Kerg và B/Imf = B/Kerg.Định nghĩa ánh xạ h’: B/Imf $\longrightarrow$ J cho bởi h’(b + Imf) = h(b), ta chứng minh h’ hoàn toàn xác định. Thật vậy, nếu b + Imf = b’ + Imf , vậy có a $\in$ A sao cho b = b’ + f(a) do đó

$$h(b) = h[b' + f(a)] = h(b') + hf(a) = h(b')$$

dễ thấy h’ là đồng cấu. Đồng cấu g’ là đẳng cấu cảm sinh từ đồng cấu g cho bởi g’(b + Kerg) = g(b), g’ hoàn toàn xác định từ định lý Noether. Đồng cấu j là phép nhúng từ Img vào C. Do J là mô đun nội xạ nên đồng cấu φ’ từ Img vào J mà φ’ đồng cấu φ từ C vào J thoả φ j = φ’.

Đồng cấu φ vừa xác định chính là đồng cấu cần tìm. Thật vậy, với mọi $b \in B$,

$h(b) = h'(b + \mathrm{Im}f) = h'(b + \mathrm{Ker}g) = \varphi' g'(b + \ker g)$
$= \varphi j g'(b + \mathrm{Ker}g) = \varphi j g(b) = \varphi g(b)$

Vậy $\varphi g = h$.

2.8.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\sigma"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mu"'] & C \arrow[d, "\varphi"'] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & J
\end{tikzcd}$$

Từ hình vuông bên trái giao hoán , ta có $g\mu\alpha = gf\sigma = 0$. Theo bài tập (2.7) tồn tại đồng cấu φ từ C vào J thoả $\varphi\beta = g\mu$.

Đồng cấu φ chính là đồng cấu phải tìm.

2.9. Giả sử R là miền nguyên và X là mô đun không xoắn chia được . Giả sử I là Ideal của R và f là đồng cấu đi từ I vào X.

_ Nếu $I = 0$, lấy $q \in X$ thì $f(0) = 0 = 0.q$

_ Nếu $I \neq 0$, lấy $\lambda, \lambda' \in I$, $\lambda \neq 0$ và $\lambda' \neq 0$. Từ X chia được nên tồn tại q, q' sao cho

$$\begin{cases} f(\lambda) = \lambda q \\ f(\lambda') = \lambda' q' \end{cases}$$

Khi đó $\lambda\lambda' \neq 0$ và :

$\lambda\lambda' q' = \lambda.f(\lambda') = f(\lambda\lambda') = f(\lambda'\lambda) = \lambda'.f(\lambda) = \lambda'\lambda q = \lambda\lambda' q$

Do X không xoắn nên $q = q'$.

Trường hợp $\lambda = 0$, $f(\lambda) = f(0) = 0 = 0.q$. Tóm lại ta có

$f(\lambda) = \lambda q$ với mọi $\lambda \in R$

Theo tiêu chuẩn Baer thì X là mô đun nội xạ.

2.10. Giả sử cột (1) và cột (2) khớp và

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

là dãy khớp ngắn. Gọi $M := X \oplus N_1 \oplus K$,

$$N = \{(x, u, 0) \in M) : x = -\beta_1(u)\}$$

khi đó N là mô đun con của M. Bây giờ ta đặt

$Y := M/N$, $N_2 := N_1 \times N_3$

từ N_1 và N_3 nội xạ ta có N_2 nội xạ , các đồng cấu f, g, α_1, β_1, α_3, β_3, đã được xác định, các đồng cấu còn lại được định nghĩa như sau (xem biểu đồ).

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha_2"] \arrow[dl, "\varphi"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & N_2 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\beta_2"] & N_3 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i_2"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

• i_1 là phép nhúng từ N_1 vào N_2.

• π_1 là phép chiếu từ N_2 xuống N_3

• $\forall x \in X$, $i_2(x) = (x, 0, 0) + N$. Nếu $i_2(x) = 0$ thì $(x, 0, 0) \in N$ do đó tồn tại $u \in N_1$ sao cho $(x, 0, 0) = (-\beta_1(u), u, 0)$ suy ra $u = 0$ và $x = -\beta_1(0) = 0$. Vậy i_2 là dơn cấu.

• $\forall (x, u, v) + N \in Y$, $\pi_2[(x, u, k) + N] = k$. Nếu $(x, u, k) + N = (x', u', k') + N$ thì $(x - x', u - u', k - k') \in N$, do đó có $x \in N_1$sao cho $(x - x', u - u', k - k') = (-\beta_1(x), x, 0)$ suy ra $k = k'$ vậy π_2 xác định, hơn nữa π_2 còn là toàn cấu.

• Từ $f : A \to B$ là đơn cấu và N_1 nội xạ do đó tồn tại đồng cấu $\varphi : B \to \mathrm{Im}\alpha_1$ sao cho $\varphi f = \alpha_1$. α_2 được xác định như sau

$$\forall b \in B,\ \alpha_2(b) = [\varphi(b), \alpha_3 g(b)]$$

• $\forall (u, v) \in N_2$, $\beta_2(u, v) = (0, u, \beta_3(v))$.

Từ các định nghĩa trên dễ dàng ta thấy được dòng (1), dòng (2) khớp. Bây giờ ta kiểm dòng (3), cột (2) khớp và biểu đồ giao hoán từng ô vuông.

• $\forall x \in X$, $\pi_2 i_2(x) = \pi_2[(x, 0, 0) + N] = 0$, vậy $\mathrm{Im}i_2 \subseteq \mathrm{Ker}\pi_2$. Mặt khác $(x, u, 0) + N = (x + \beta_1(u), 0, 0) + N = i_2[x + \beta_1(u)]$ vậy $\mathrm{Ker}\pi_2 \subseteq \mathrm{Im}i_2$. Do đó dòng (3) khớp.

• Với mọi $a \in A$, ta có

$$\alpha_2 f(a) = [\varphi f(a), \alpha_3 g\, f(a)]$$

$= \ [\alpha_1(a), 0]$

$= \ i_1\alpha_1(x)$

$\Rightarrow \ \alpha_2 f \ = \ i_1\alpha_1$

- Với mọi $b \in B$, ta có

$$\pi_1\alpha_2(b) \ = \alpha_3 g(b) \ \Rightarrow \pi_1\, \alpha_2 = \alpha_3 g$$

- Với mọi $(u, v) \ \in N_2$, ta có

$$\pi_2\beta_2(u, v) = \pi_2(0, u, \beta_3(v)) = \beta_3(v) = \beta_3\pi_1(u, v)$$

$$\Rightarrow \ \beta_3\pi_1 \ = \ \pi_2\beta_2$$

- Với mọi $u \in N_1$, ta có

$$\beta_2 i_1(u) = \beta_2(u, 0) = (0, u, 0) + N = (\beta_1(u)\ , 0, 0) + N = i_2\beta_1(u)$$

$$\Rightarrow \ \beta_2 i_1 \ = \ i_2\beta_1$$

Vậy tất cả ô vuông đều giao hoán .

- Từ α_1, α_3 là đơn cấu và β_1, β_3 là toàn cấu theo bổ đề 5 ngắn, ta có α_2 là đơn cấu và β_2 là toàn cấu

- Để ý $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Im}\alpha_1 = \mathrm{Ker}\beta_1$. Do đó, với mọi $b \in B$

$$\beta_2\alpha_2(b) \ = \ \beta_2[\varphi(b), \alpha_3 g(b)]$$

$$= (0, \varphi(b), \beta_3\alpha_3 g(b) + N\ )$$

$$= (\ -\beta_1\varphi(b), \varphi(b), 0) + N \ = 0$$

$\Rightarrow \qquad \mathrm{Im}\alpha_2 \subseteq \beta_3\pi_2$

- Lấy $(u, v) \in \mathrm{Ker}\beta_2$, khi đó $(0, u, \beta_3(v)) \in N$, vì vậy

$$u \in \mathrm{Ker}\beta_1 = \mathrm{Im}\alpha_1 \text{ và } v \in \mathrm{Ker}\beta_3 = \mathrm{Im}\alpha_3$$

do đó có $a \in A$, $b \in B$ sao cho $\alpha_1(a) = u$, $\alpha_3 g(b) = v$. Mặt khác do $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Im}\alpha_1$ nên tồn tại $a' \in A$ sao cho $\alpha_1(a') = \varphi(b)$. Bây giờ lấy phần tử $f(a - a') + b \in B$, ta có

$$\begin{aligned}\beta_2[f(a - a') + b] &= (\varphi f(a - a') + \varphi(b), \pi_3 gf(a - a') + \pi_3 g(b))\\ &= (\alpha_1(a) - \alpha_1(a') + \varphi(b), \pi_3 g(b))\\ &= (u, v)\end{aligned}$$

Vậy $\mathrm{Ker}\beta_2 \subseteq \mathrm{Im}\alpha_2$, suy ra cột 2 khớp.

Cách khác: Sử dụng biểu đồ trên với hai cột biên khớp :

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha_1} N_1 \xrightarrow{\beta_1} X \to 0 \quad \text{và } 0 \to C \xrightarrow{\alpha_3} N_3 \xrightarrow{\beta_3} K \to 0$$

Chọn $N = N_1 \oplus N_3$, ta có dãy khớp chẻ sau:

$$0 \to N_1 \xrightarrow{i_1} N_1 \oplus N_3 \xrightarrow{\pi_1} N_3 \to 0$$

Tương tự cách trên, do N_1 nội xạ và $f: A \to B$ đơn cấu nên đồng cấu $\alpha_1 : A \to N_1$ có thể mở rộng tới $\varphi: B \to N_1$. Điều đó cho phép dựng đồng cấu $\alpha_2: B \to N_2 = N_1 \oplus N_3$ mà với mọi $b \in B$:
$\alpha_2(b) = (\varphi(b), \alpha_3 g(b))$.

Với đồng cấu này, biểu đồ với hai dòng khớp sau là giao hoán:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_3} & & \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{i_1} & N_2 & \xrightarrow{\pi_2} & N_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Không mấy khó khăn để kiểm tra rằng dãy Coker của biểu đồ này là khớp :

$$0 \to X \cong \mathrm{Coker}\alpha_1 \to \mathrm{Coker}\alpha_2 \to \mathrm{Coker}\alpha_3 \cong K$$

và đó chính là dòng dưới khớp của biểu đồ 3×3 phải tìm.

2.11. Giả sử ta có dãy khớp ngắn

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

Từ g là toàn cấu nên cảm sinh đẳng cấu

$$\varphi' : P \longrightarrow B/\,\mathrm{Kerg}$$
$$c \to b_c + \mathrm{Kerg}$$

Với $b_c \in g^{-1}(c)$. Gọi N(B) là mô đun nội xạ nhận B làm mô đun con, i là phép nhúng từ B vào N(B). Định nghĩa ánh xạ

$$\varphi : P \longrightarrow N(B)/\,\mathrm{Kerg}$$
$$c \to \varphi'(c)$$

Từ φ' là đẳng cấu, ta có φ là đơn cấu. Gọi π là ánh xạ tự nhiên từ N(B) vào N(B)/Kerg. Theo giả thiết tồn tại đồng cấu ψ' từ P vào N(B) thoả $\pi\psi' = \varphi$ (xembiểu đồ).

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, "\psi'"'] & 0 \\
 & & N(B) \arrow[r, "\pi"'] & N(B)/\mathrm{Kerg} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Bây giờ với $c \in P$, tồn tại $b_c \in g^{-1}(c)$ sao cho $\varphi'(c) = b_c + \mathrm{Kerg}$

Vậy: $$b_c + \mathrm{Kerg} = \varphi(c) = \pi\psi'(c) = \psi'(c) + \mathrm{Kerg}$$

suy ra tồn tại $x_c \in \mathrm{Kerg}$ sao cho $\psi'(c) = b_c + x_c$, do đó

$$\mathrm{Im}\psi' \subseteq B.$$

Từ bao hàm này ánh xạ $\psi : P \longrightarrow B$ cho bởi $\psi(c) = \psi'(c)$ hoàn toàn xác định. Hơn nữa, với mọi $c \in P$, ta có

$$g\psi(c) = g\psi'(c) = g(b_c + x_c) = g(b_c) + g(x_c) = c$$

$$\Rightarrow \; g\psi = 1_C$$

Tức dãy khớp ngắn có nghịch đảo phải, vì vậy dãy khớp ngắn chẻ ra, do đó P là xạ ảnh.

Chiều thuận là hiển nhiên từ định nghĩa của mô đun xạ ảnh

2.12. Gọi F(J) , F(B) là các mô đun tự do sinh ra bởi các cơ sở tương ứng là J và B. Các ánh xạ đồng nhất 1_J và 1_B cảm sinh các đồng cấu π_J và π_B tương ứng lần lượt từ F(J) vào J, F(B) vào B thoả

$$\pi_J|_J = 1_J\ ,\ \pi_B|_B = 1_B.$$

Giả sử ta có dãy khớp ngắn

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Xét biểu đồ sau

$$\begin{tikzcd}
 & F(J) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi_J"'] & F(B) \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "\pi_B"] & & \\
0 \arrow[r] & J \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Do F(J) là mô đun tự do nên tồn tại duy nhất đồng cấu h từ F(J) vào F(B) thoả tính chất $h(x) = f(x)$ với mọi $x \in J$, mặt khác

$$\mathrm{Kerh} = \{\textstyle\sum_{hh} r_i x_i \ :\ r_i \in R,\ x_i \in J,\ h(\sum_{hh} r_i x_i) = 0\}$$

$$= \{\textstyle\sum_{hh} r_i x_i \ :\ r_i \in R,\ x_i \in J,\ \sum_{hh} r_i h(x_i) = 0\}$$

Do mỗi $h(x_i)$ nằm trong cơ sở của F(B) nên ta có $r_i = 0$ với mọi i, vì vậy Kerh = 0 tức h là đơn cấu. Áp dụng giả thiết ta có đồng cấu φ đi từ F(B) vào J thoả

$$\varphi h = \pi_J\ .$$

Định nghĩa ánh xạ

$$\sigma : B \longrightarrow J$$
$$b \to \sigma(b) = \varphi(b)$$

Khi đó với mọi $b, b' \in B$, với mọi $r, r' \in R$ ta có

$$\sigma(rb + r'b') = \varphi(rb + r'b') = r\varphi(b) + r'\varphi(b') = r\sigma(b) + r'\sigma(b')$$

Vậy σ là đồng cấu. Hơn nữa với mọi $x \in J$,

$$\sigma f(x) = \sigma h(x) = \varphi h(x) = \pi_J(x) = x$$

Vậy $\sigma f = 1_j$ do dó dãy khớp ngắn chẻ ra, điều này chứng tỏ J là mô đun nội xạ. Chiều thuận là hiển nhiên từ định nghĩa của mô đun nội xạ.

2.13. ($\Rightarrow$) Hiển nhiên từ định nghĩa của song tuyến tính.

($\Leftarrow$) Giả sử φ là song cộng tính (chú ý do $\mathbb{Z}$ giao hoán nên $\mathbb{Z}$-mô đun trái và $\mathbb{Z}$-mô đun phải trùng nhau).

Nếu $k \in \mathbb{Z}$ mà $k \in \mathbb{Z}^+$**,** khi đó ta co

$$\begin{aligned}
\varphi(xk, y) &= \varphi(\underbrace{x + x + \ldots + x}_{k \text{ lần}}, y) \\
&= \underbrace{\varphi(x, y) + \varphi(x, y) + \ldots + \varphi(x, y)}_{k \text{ lần}} \\
&= \varphi(x, \underbrace{y + y + \ldots + y}_{k \text{ lần}}) \\
&= \varphi(x, ky)
\end{aligned}$$

Ta có: $\varphi(x, 0) = \varphi(x, 0 + 0) = \varphi(x, 0) + \varphi(x, 0)$

$\Rightarrow \qquad \varphi(x, 0) = 0$

$\Rightarrow \qquad 0 = \varphi(x, y + (-y)) = \varphi(x, y) + \varphi(x, -y)$

$$\Rightarrow \ \varphi(x, -y) = -\varphi(x, y)$$

Hoàn toàn tương tự khi hoán vị x, y ta nhận được

$$\varphi(x, -y) = -\varphi(x, y)$$

Do đó $\varphi(-x, y) = \varphi(x, -y)$ (2)

Nếu $k < 0$ thì: $\varphi(xk, y) = \varphi(x(-k), -y) = \varphi(x,(-k)(-y)) = \varphi(x, ky)$
Bây giờ với $k = 0$ thì

$$\varphi(x, 0.y) = \varphi(x, 0) = 0 = \varphi(0, y) = \varphi(x.0, y)$$

Tóm lại trong phạm trù $\mathbb{Z}$-mô đun thì song tuyến tính và song cộng tính trùng nhau.

2. 14.

a) Đặt

$$A := \{m \otimes t : m \in \quad , t \in \quad \}; \ B := \{r \otimes s \ : \ r,s \in \quad \}$$

Rõ ràng $A \subseteq B$, để thấy chiều đảo lấy $mn^{-1} \otimes pq^{-1} \in B$. Khi đó

$$\begin{aligned} mn^{-1} \otimes pq^{-1} &= mn^{-1} \otimes nn^{-1}pq^{-1} \\ &= m \otimes n^{-1}pq^{-1} \in A \end{aligned}$$

do đó $A = B$ điều này dẫn tới

$$< A > = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q} = < B >$$

Mặt khác $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$ do đó ta có $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

b) Lấy $mn^{-1} \otimes (pq^{-1} + \mathbb{Z})$ là phần tử trong tập sinh của nhóm $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Khi đó

$$mn^{-1} \otimes (pq^{-1} + \mathbb{Z}) = mn^{-1}qq^{-1} \otimes (pq^{-1} + \mathbb{Z})$$

$$= mn^{-1}q^{-1} \oplus (p + \mathbb{Z})$$

$$= mn^{-1}q^{-1} \otimes 0$$

$$= 0$$

Suy ra tập sinh của $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ chỉ chứa phần tử 0 , do đó ta có

$$\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{0\}.$$

c) Lấy $mn^{-1} \otimes a \in \mathbb{Q} \otimes A$, từ A là mô đun xoắn ắt tồn tại $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ sao cho $ka = 0$. Khi đó

$$mn^{-1} \otimes a = mn^{-1}k^{-1} \otimes ka$$

$$= mn^{-1}k^{-1} \otimes 0$$

$$= 0$$

Điều này chứng tỏ tập sinh của $\mathbb{Q} \otimes A$ chỉ chứa phần tử 0, do đó $\mathbb{Q} \otimes A = \{0\}$.

2. 15.

Cách 1: Trước tiên ta xét bổ đề sau

Bổ đề

i) $\mathbb{Z}_d \otimes \mathbb{Z}_d \cong \mathbb{Z}_d$

ii) $d + m\mathbb{Z} \otimes 1 + n\mathbb{Z} = 0$

Chứng minh.

i) Xét ánh xạ

$$\tau : \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d \longrightarrow \mathbb{Z}_d$$
$$(k + d\mathbb{Z}, l + d\mathbb{Z}) \to kl + d\mathbb{Z}$$

Ta chứng minh ánh xạ τ hoàn toàn xác định. Thật vậy, nếu ta có

$$(k + d\mathbb{Z}, l + d\mathbb{Z}) = (k' + d\mathbb{Z}, l' + d\mathbb{Z})$$

thì

$$k + d\mathbb{Z} = k' + d\mathbb{Z} \quad \text{và} \quad l + d\mathbb{Z} = l' + d\mathbb{Z}$$

suy ra tồn tại $r, s \in \mathbb{Z}$ sao cho $k = k' + rd$, $l = l' + sd$. Khi đó

$$kl + d\mathbb{Z} = (k' + rd)(l' + sd) + d\mathbb{Z}$$

$$= k'l' + (k's + rl' + rsd)d + d\mathbb{Z}$$

$$= k'l' + d\mathbb{Z}$$

Dễ dàng kiểm được τ là ánh xạ song tuyến tính.

Bây giờ nếu φ là ánh xạ song tuyến tính đi từ $(\mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d)$ vào mô đun X bất kỳ. Ta xác định ánh xạ f như sau

$$f: \mathbb{Z}_d \longrightarrow X$$

$$k + d\mathbb{Z} \to \varphi(k + d\mathbb{Z}, 1 + d\mathbb{Z})$$

Tính toán đơn giản ta có được d là đồng cấu. Hơn nữa với mọi $(k + d\mathbb{Z}, 1 + d\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d$, ta có

$$f\tau(k + d\mathbb{Z}, 1 + d\mathbb{Z}) = f(kl + d\mathbb{Z})$$

$$= \varphi(kl + d\mathbb{Z}, 1 + d\mathbb{Z})$$

$$= \varphi(k + d\mathbb{Z}, 1 + d\mathbb{Z})$$

suy ra $\varphi = f\tau$.

Bây giờ nếu có đồng cấu g từ $\mathbb{Z}_d$ vào X thoả điều kiện $\varphi = g\tau$ thì với mọi $k + d \in \mathbb{Z}_d$, ta có

$$g(k + d\mathbb{Z}) = g\tau(k + d\mathbb{Z}, 1 + d\mathbb{Z})$$

$= \varphi(k + d\mathbb{Z}, 1 + d\mathbb{Z})$

$= f\tau(k + d\mathbb{Z}, 1 + d\mathbb{Z})$

$= f(k + d\mathbb{Z})$

Tức g = f do đó f là duy nhất .

Áp dụng tính chất phổ dụng của tích ten xơ ta nhận được

$$\mathbb{Z}_d \otimes \mathbb{Z}_d \cong \mathbb{Z}_d.$$

ii) Từ d = (m, n) do đó tồn tại a, b $\in \mathbb{Z}$ sao cho am + bn = d. Khi đó ta có

$0 = (am + m\mathbb{Z} \otimes 1 + n\mathbb{Z}) + (1 + m\mathbb{Z} \otimes bn + n\mathbb{Z})$

$= (am + m\mathbb{Z} \otimes 1 + n\mathbb{Z}) + (bn + m\mathbb{Z} \otimes 1 + n\mathbb{Z})$

$= (am + bn) + m\mathbb{Z} \otimes 1 + n\mathbb{Z}$

$= d + m\mathbb{Z} \otimes 1 + n\mathbb{Z}$. (đpcm)

Xét các ánh xạ tự nhiên

$$\sigma : \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathbb{Z}_d \; ; \qquad \mu : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_d$$

$$k + m\mathbb{Z} \to k + d\mathbb{Z} \qquad 1 + n\mathbb{Z} \to 1 + d\mathbb{Z}$$

Do $m\mathbb{Z} \subseteq d\mathbb{Z}$ và $n\mathbb{Z} \subseteq d\mathbb{Z}$, nên các ánh xạ σ và μ hoàn toàn xác định. Hơn nữa, dễ thấy chúng là những toàn cấu diều này dẫn đến đồng cấu $\sigma \otimes \mu$ đi từ $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n$ vào $\mathbb{Z}_d \otimes \mathbb{Z}_d$ cũng là toàn cấu. Tính toán $\mathrm{Ker}(\sigma \otimes \mu)$, ta được

$$\mathrm{Ker}(\sigma \otimes \mu) =$$
$$< \{k + m\mathbb{Z} \otimes l + n\mathbb{Z} : k + m\mathbb{Z} \in \mathrm{Ker}\sigma \text{ hoặc } l + n\mathbb{Z} \in \mathrm{Ker}\mu\} >$$

$$= < \{k + m\mathbb{Z} \otimes l + n\mathbb{Z} : k = rd \text{ hoặc } l = sd >$$

$$= \{0\} \quad \text{(do bổ đề (ii))}$$

Áp dụng bổ đề (i), ta có

$$\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_d \otimes \mathbb{Z}_d \cong \mathbb{Z}_d .$$

Bây giờ nếu $(m, n) = 1$ thì $\mathbb{Z}_d = \mathbb{Z}_1 = 0$ do đó $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = \{0\}$.

Cách 2: Ta có thể chứng minh trực tiếp $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_d$ theo công thức $\tau(k + m\mathbb{Z}, l + n\mathbb{Z}) = kl + d\mathbb{Z}$. τ xác định hợp lý vì nếu $k' = k + mt$, $l'\ l + ns$ thì $k'l' = kl + dh \in kl + d\mathbb{Z}$. Dễ thấy τ là song cộng tính. Nếu có ánh xạ song cộng tính
$\varphi: \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \to X$ thì ta dựng đồng cấu $f: \mathbb{Z}_d \to X$ theo công thức $f(t + d\mathbb{Z}) = \varphi(t + m\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z})$. Ánh xạ f xác định hợp lý vì nếu $t' = t + dv$. tương tự cách chứng minh bổ đề (ii) ta có

$\varphi(d + m\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}) = 0$,do đó $\varphi(dv + m\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}) = 0$, cho ta $f(t + d\mathbb{Z}) = f(t' + d\mathbb{Z})$. Hiển nhiên $f\tau = \varphi$. Nếu có $f': \mathbb{Z}_d \to X$ mà $f'\tau = \varphi$ thì với mọi $t + d\mathbb{Z} \in d\mathbb{Z}$, ta có:

$$f'(t + d\mathbb{Z}) = f'\tau(t + m\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z})$$

$$= \varphi(t + m\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z})$$

$$= f(t + \mathbb{Z}_d)$$

$\Rightarrow f = f'$.

vậy $\mathbb{Z}_d \cong \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n$.

Cách 3: Xét tích ten xơ các toàn cấu tự nhiên $p_1: \mathbb{Z} \to m\mathbb{Z}$ và $p_2: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ mà $P_1(x) = x + m\mathbb{Z}$, $p_2(y) = y + n\mathbb{Z}$. Hiển nhiên $h = p_1 \otimes p_2: \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n$ là toàn cấu, và

$K = Ker(p_1 \otimes p_2) = <\{x \otimes y : x = mt \text{ hay } y = ms\}>$

Dễ thấy $Ker(p_1 \otimes p_2) \subseteq D = <d \otimes 1>$ với $d = (m, n)$. Hơn nữa vì $d = (m, n)$ nên tồn tại $a, b \in$ mà $d = ma + nb$ do đó $d \otimes 1 = (ma + nb) \otimes 1 = ma \otimes 1 + nb \otimes 1 = ma \otimes 1 + b \otimes n \in K$. Vậy :

$$D = <d \otimes 1> \subseteq K \text{ suy ra } D = K.$$

Theo định lý Noether toàn cấu h sinh ra đẳng cấu
$h': (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n$. Sử dụng đẳng cấu $\theta: \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$

mà $\theta(k \otimes l) = kl$, thì $\theta(D) = \theta(D) = d\,\mathbb{Z}$. Vậy:

$$\mathbb{Z}_{dm} \otimes \mathbb{Z}_{dn} \cong (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) / K \cong \mathbb{Z} / \theta(K) \cong \mathbb{Z} / d\,\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_d.$$

2.16. Giả sử X và Y là hai nhóm abel hữu hạn sinh. Gọi $\{r_i\}_{i\in I}$, $\{s_j\}_{j\in J}$ lần lượt là tập sinh của của X và Y, trong đó I, J là những tập hữu hạn. Với mọi $x_t \otimes y_k \in X \otimes Y$, ta có

$$x_t \otimes y_k = \sum_{i\in I} m_{it} r_i \otimes \sum_{j\in J} n_{jk} s_j$$

$$= \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} m_{it}\, n_{jk}(r_i \otimes s_j)$$

Trong đó $m_{it}, n_{jk} \in \mathbb{Z}$ với mọi i, j. Vì vậy, với mỗi $a \in X \otimes Y$

$$a = \sum_{hh} x_t \otimes y_k$$

$$= \sum_{hh} \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} m_{it}\, n_{jk}(r_i \otimes s_j)$$

Điều này chứng tỏ tập $A := \{r_i \otimes s_j\}_{i\in I, j\in J}$ là tập sinh của $X \otimes Y$. Từ lực lượng của I, J hữu hạn ta nhận được A có lực lượng hữu hạn (đpcm).

2.17. Gọi a là phần tử sinh của A. Với mọi $k \in \mathbb{Z}$, ta có

$$2k \otimes a = \begin{cases} 2 \otimes a & \text{nếu } k \text{ lẻ} \\ 0 & \text{nếu } k \text{ chẵn} \end{cases}$$

suyra $2\mathbb{Z} \otimes A = \langle 2 \otimes a \rangle$. Mặt khác

$$2(2 \otimes a) = 2 \otimes 2a = 2 \otimes 0 = 0$$

Vì vậy $2\mathbb{Z} \otimes A$ là nhóm cyclic cấp 2.

Với phần tử sinh $(2 \otimes a) \in 2\mathbb{Z} \otimes A$ ta có

$$\begin{aligned} j \otimes 1_A (2 \otimes a) &= j \otimes 1_A(2 \otimes a) \\ &= (2 \otimes a) \\ &= (1 \otimes 2a) \\ &= (1 \otimes 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vì vậy $j \otimes 1_A$ là đồng cấu 0 như đã miêu tả.

2.18. Để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh $i \otimes j$ đơn ánh . Gọi A' và B' lần lượt là mô đun con bù trực tiếp của hai mô đun A và B, nghĩa là

$$X = A \oplus A', \quad Y = B \oplus B'$$

Đặt $C := (A \otimes B) \oplus (A \otimes B') \oplus (A' \otimes B) \oplus (A' \otimes B')$

Theo định lý tổng trực tiếp của tích ten xơ tồn tại đẳng cấu g từ C vào $X \otimes Y$. Gọi α là phép nhúng $(A \otimes B)$ vào C, xét dãy đồng cấu

$$A \otimes B \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{g} X \otimes Y$$

Với mọi $a \otimes b \in A \otimes B$, theo định nghĩa của g ta có

$$\begin{aligned} g\alpha(a \otimes b) &= g(a \otimes b, 0, 0, 0) \\ &= (a, 0) \otimes (b, 0) \\ &= i(a) \otimes j(b) \\ &= (i\otimes j)(a \otimes b) \end{aligned}$$

Vậy $g\alpha$ và $(i\otimes j)$ đồng nhất trên hệ sinh, suy ra $g\alpha = (i\otimes j)$. Hơn nữa, $g\alpha$ là đơn cấu do đó $(i\otimes j)$ là đơn cấu (đpcm).

2.19. Giả sử f làđẳng cấu từ A vào A', g là đẳng cấu từ B vào B'. Khi đó $f \otimes g$ là toàn cấu, hơn nữa

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f\otimes g) &= <\{a \otimes b \in A \otimes B : f(a) = 0 \text{ hoặc } g(b) = 0\}> \\ &= <\{a \otimes b \in A \otimes B : a = 0 \text{ hoặc } b = 0\} = \{0\} \end{aligned}$$

Do đó $f\otimes g$ là đẳng cấu (đpcm).

Cách khác: do $f: A \to A'$, $g : B \to B'$ đẳng cấu nên tồn tại các đẳng cấu ngược $f^{-1}: A' \to A$ và $g^{-1}: B' \to B$. Hiển nhiên rằng: $f^{-1}\otimes g^{-1} = (f\otimes g)^{-1}$, tức $f \otimes g$ là đẳng cấu.

2.20.

($\Rightarrow$) Giả sử $\{A_i\}_{i\in I}$ là họ mô đun dẹt và

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

là dãy khớp ngắn bất kỳ. Từ định lý khớp của tích ten xơ và định nghĩa của mô đun dẹt để chứng minh $\bigoplus_{i \in I} A_i$ là mô đun dẹt ta chỉ cần chứng minh $(1_{\oplus A_i} \otimes f)$ là đơn cấu.

Do với mỗi i, A_i là mô đun dẹt nên dãy

$$0 \longrightarrow A_i \otimes X \xrightarrow{1_{A_i} \otimes f} A_i \otimes Y \xrightarrow{1_{A_i} \otimes g} A_i \otimes Z \longrightarrow 0$$

cũng là dãy khớp, vì vậy với mọi $i \in I$, ta có $(1_{A_i} \otimes f)$ là đơn cấu.

Gọi :

- φ là đẳng cấu từ $\bigoplus_{i \in I} (A_i \otimes Y)$ vào $(\bigoplus_{i \in I} A_i) \otimes Y$ như

trong định lý 2 chương II

- j_i là phép nhúng $A_i \otimes Y$ vào trong $\bigoplus_{i \in I} (A_i \otimes Y)$

Với mọi $i \in I$ xét dãy đồng cấu

$$A_i \otimes X \xrightarrow{1_{A_i} \otimes f} A_i \otimes Y \xrightarrow{j_i} \bigoplus_{i \in I} (A_i \otimes Y) \xrightarrow{\varphi} (\bigoplus_{i \in I} A_i) \otimes Y$$

Đặt $h_i := \varphi . j_i . 1_{A_i} \otimes f$, khi đó h_i là đơn cấu bởi các thành phần hợp nối đều là đơn cấu, vì vậy ta có họ đơn cấu

$$\{h_i : A_i \otimes X \to (\bigoplus_{i\in I} A_i) \otimes Y \ : \ i\in I\}$$

Với mọi $i\in I$, gọi i_i là phép nhúng thành phần $(A_i \otimes X)$ vào trong $\bigoplus_{i\in I}(A_i \otimes X)$. Áp dụng định lý tính phổ dụng của tích trực tiếp ta có đồng cấu σ từ $\bigoplus_{i\in I}(A_i \otimes X)$ vào $(\bigoplus_{i\in I} A_i) \otimes Y$ thoả $\sigma\, i_i = h_i$.

Lấy $x := \sum_{i\in I}(x_i) \in \operatorname{Ker}\sigma$, khi đó

$$\begin{aligned}
0 &= \sigma(x) \\
&= \sigma\left[\sum_{i\in I} i_i(x_i)\right] \\
&= \sum_{i\in I} \sigma\, i_i(x_i) \\
&= \sum_{i\in I} h_i(x_i)
\end{aligned}$$

Vì vậy $h_i(x_i) = 0$, bởi mỗi h_i là đơn cấu nên ta có $x_i = 0$ với mọi $i \in I$ tức $x = 0$, do đó σ là đơn cấu. Hơn nữa, tính toán đơn giản trên phần tử sinh ta có $\sigma = 1_{A_i} \otimes f$ (đpcm).

($\Leftarrow$) Giả sử $\bigoplus_{i\in I} A_i$ là mô đun dẹt, cho dãy khớp ngắn

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

Với mọi $i \in I$, gọi :

j_i là phép nhúng A_i vào $\bigoplus_{i\in I} A_i$

π_i là phép chiếu từ $\bigoplus_{i\in I} A_i$ xuống A_i .

Từ $\oplus_{i\in I}A_i$ là mô đun dẹt nên $1_{\oplus Ai} \otimes f$ là đơn cấu. Theo bài tập 2.18 ta có $j_i \otimes 1_X$ là phép nhúng và

$$\mathrm{Ker}(\pi_i \otimes 1_Y) = <\{a_i \otimes y \ :\ a_i \in \mathrm{Ker}\pi_i \text{ hoặc } y = 0\}$$

Xét dãy đồng cấu

$$A_i \otimes X \xrightarrow{j_i\otimes 1_X} \bigoplus_{i\in I} A_i \oplus X \xrightarrow{1_{\oplus Ai}\otimes f} \bigoplus_{i\in I} A_i \otimes Y \xrightarrow{\pi_i\otimes 1_Y} A_i \otimes Y$$

Đặt $h := (\pi_i\otimes 1_Y)\,(1_{\otimes Ai}\otimes f)\,(j_i\otimes 1_X)$. Ta chứng minh h là đơn cấu, thật vậy với $x := \sum_{hh}(a_t \otimes x_k) \in \mathrm{Ker}h$, ta có

$$h(x) = (\pi_i\otimes 1_Y)\,(1_{\otimes Ai}\otimes f)\,(j_i\otimes 1_X)\,[\textstyle\sum_{hh}(a_t \otimes x_k)]$$

$$= (\pi_i\otimes 1_Y)\,(1_{\oplus Ai}\otimes f)\,[\textstyle\sum_{hh}(j_i(a_t) \otimes x_k)$$

$$= \textstyle\sum_{hh}(\pi_i\otimes 1_Y)(j_i(a_t) \otimes f(x_k))$$

Theo tính chất của $\mathrm{Ker}(\pi_i\otimes 1_Y)$ ta có các $j_i(a_t) \in \mathrm{Ker}\pi_i$ hoặc các $x_k \in \mathrm{Ker}f$. Do cả j_i và f đều là đơn cấu nên các $a_t = 0$ hoặc các $x_k = 0$ suy ra $x = 0$ điều này khẳng định h là đơn cấu. Hơn nữa với mọi $x := (a_t \otimes x_k) \in A_i \otimes X$, ta có

$$h(x) = (\pi_i\otimes 1_Y)\,(1_{\otimes Ai}\otimes f)\,(j_i\otimes 1_X)(a_t \otimes x_k)$$

$$= (\pi_i\otimes 1_Y)\,(1_{\oplus Ai}\otimes f)\,(j_i(a_t) \otimes x_k)$$

$= (\pi_i \otimes 1_Y)(j_i(a_t) \otimes f(x_k))$

$= a_t \otimes f(x_k)$

$= (1_{A_i} \otimes f)(a_t \otimes x_k)$

nhau. Từ h làđơn ánh ta có được $(1_{A_i} \otimes f)$ là đơn ánh.

2.21. Giả sử F là mô đun tự do, khi đó tồn tại tập chỉ số I sao cho

$$F \cong \bigoplus_{i \in I} R_i \quad \text{trong đó} \quad R_i \cong R \quad \text{với mọi } i \in I$$

Do mỗi R là mô đun dẹt theo bài tập 2.20 thì F là mô đun dẹt.

Vì mỗi mô đun xạ ảnh đều đẳng cấu với hạng tử trực tiếp của mô đun tự do X nào đó. Theo bài tập 2.20 các hạng tử trực tiếp của X đều là mô đun dẹt do đó mô đun xạ ảnh là mô đun dẹt. Mô đun dẹt có thể không là mô đun xạ ảnh. Ví dụ chẳng hạn như nhóm$(\mathbb{Q}, +)$ là mô đun dẹt nhưng không phải là mô đun xạ ảnh.

2.23. M chính là không gian véc tơ trên thể do đó mọi dãy khớp ngắn đều chẻ ra.

2.24. Dùng định nghĩa.

2.25. Chú ý vành $\mathbb{Z}$ là vành chính.

2.26. Dùng phản chứng.

2.27. Xét dãy khớp ngắn

$$0 \to \tau(M) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/\tau(M) \to 0$$

với i là phép nhúng, π là phép chiếu. Áp dụng bài tập 2.24.

2.28. Chú ý mọi $\mathbb{Z}$ - mô đun con chia được của mô đun chia được M đều là hạng tử trực tiếp. Lấy $0 \neq x_1 \in M$, với mọi $n \in \mathbb{N}$ chọn $(n+1)x_{n+1} = x_n$. Đặt $A_1 := < \{x_i\} >$, chứng minh $A_1 \cong$.
Biểu diễn $M = A_1 \oplus B_1$, áp dụng quy nạp siêu hạn.

2.29. i) Dùng định nghĩa.

ii) Áp dụng bài tập 2.27.

iii) Xét tác động $(m + p\mathbb{Z}).\ x = mx$.

iv) Tính toán trực tiếp.

2.30. Phân tích $M = \tau(M) \oplus M/\tau(M)$ và $\tau(M) = \bigoplus_{p\in\Omega} \tau(M)_{p^\infty}$, Với Ω là tập các số nguyên tố. Áp dụng bài tập 2.28.

2.31. Với $f : I \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$, xét $\mathbb{Z}$ - đồng cấu $g : I \to M$ cho bởi $g(r) = f(r)(1)$, cảm sinh đồng cấu mở rộng $g' : R \to M$. Tìm đồng cấu $f' : R \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ là mở rộng của đồng cấu f.

2.32. Gọi $f' : R \to M$ là đồng cấu mở rộng của $f : J \to A$, với J là iđêan của R. Chứng minh $f'(1) \in A$.

2.33. i) Cố định $r \in R$, xét ánh xạ song tuyến tính $f : M \times L \to M \otimes_S L$ cho bởi $f(m, l) = rm \otimes l$, Gọi τ_S là ánh xạ ten xơ từ $M \otimes_S L$ vào $M \otimes_S L$. Định nghĩa

$r(\sum m_i \otimes l_i) = \tau_S (\sum m_i \otimes l_i)$.

ii) tương tự như trong (i).

2.34. Cố định $z \in L$. Xét ánh xạ $f_z : N \times M \to N \otimes_R (M \otimes_S L)$, $f_z(x, y) = x \otimes (y \otimes z)$, f_z cảm sinh $\tau_z : N \otimes_R M \to N \otimes_R (M \otimes_S L)$ định nghĩa $g : (N \otimes_R M) \times L \to N \otimes_R (M \otimes_S L)$, $g(x, z) = \tau_z(x)$ nâng g thành đồng cấu ten xơ τ. Chứng minh τ là đẳng cấu.

2.35. Với mọi $r \in R$, định nghĩa $f_r : M \to M$, $f_r(m) = r\, m$. Định nghĩa $\varphi : R \to Hom(M \otimes_R N, M \otimes_R N)$, $h(r) = f_r \otimes 1_N$. Áp dụng bài tập 1.1.

2.36. i) Áp dụng bài tập 2.34.

ii) Gọi $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ và $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ lần lượt là cơ sở của U và V. Chứng minh $\{x_i \otimes y_j : 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$ là cơ sở của $U \otimes_K V$.

2.37. Xét $f : M \times N \to N \otimes M$, $f(m, n) = n \otimes m$.

2.38. i) Định nghĩa $f : R/I \times M \to M/IM$, $f(r + I, m) = rm + IM$. Nâng f thành ánh xạ ten xơ τ. Định nghĩa $g : M/IM \to R/I \otimes M$, $g(m + IM) = (1 + I) \otimes m$. Chứng minh $gf = 1$ và $fg = 1$.

ii) Xét dãy khớp

$$0 \to J \xrightarrow{i} R \xrightarrow{\pi} R/J \to 0$$

và biểu đồ

$$\begin{tikzcd}
R/I \otimes J \arrow[r, "1 \otimes i"] \arrow[d, "f"] & R/I \otimes R \arrow[r, "1 \otimes \pi"] \arrow[d, "g"] & R/I \otimes R/J \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
(I + J)/I \arrow[r, "j"] & R/I \arrow[r, "p"] & R/(I + J) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

i, j nhúng p, π chiếu. Chứng minh f là đẳng cấu và ô vuông trái giao hoán.

2.39. Với mọi $a \in A$, xét ánh xạ $L_a\ A \to A$ là phép nhân trái bởi a. $h : A \to Hom_R(M \otimes_R A, M \oplus_R A)$ cho bởi $a \to 1_M \otimes L_a$. Chứng minh h là đồng cấu vành .

Định nghĩa $a.x = h(a)x$ với mọi $x \in M \oplus_R A$.

2.40. Các bước chứng minh

i) Với mỗi $b \in B$, chứng minh $L_b : M \otimes_A A \to M \otimes_R B$ là đồng cấu R-mô đun.

ii) Chứng minh $f : (M \otimes_R A) \times B \to M \otimes_R B$ cho bởi $f(x, b) = L_b(x)$ là A-song tuyến tính.

iii) Nâng f thành L_f A-đồng cấu từ $(M \otimes_R A) \otimes_A B$ vào cho bởi $L_f[(m \otimes a)b] = L_b(m \otimes a)$. Chứng minh rằng L_f là đồng cấu B-mô đun.

iv) Chứng minh L_g từ $M \otimes_R B$ vào $(M \otimes_R A) \otimes_A B$ cho bởi $L_g(m \otimes b) = (m \otimes 1) \otimes b$ là đồng cấu B-mô đun và là ánh xạ ngược của L_f.

2.40. Tương tự như bài 2.39.

2.41. Xét ánh xạ $g : M \times A \to X$, $g(m, a) = af(m)$.

2.42. i) Để ý $M_n(R)$ là R-mô đun tự do với cơ sở $\{e_{ij}\}$, ở đây e_{ij} là ma trận có hệ số ở vị trí ij bằng 1, các vị trí còn lại bằng không, $M_n(R) \otimes_A A$ có cơ sở là $\{e_{ij} \otimes 1\}$. Áp dụng bài 2.20.

iii) Áp dụng (i).

CHƯƠNG III

3.1. Với mỗi $q \in \mathbb{N}$, do nhóm aben tự do X_{q+1} là $\mathbb{Z}$-mô đun tựdo, nên theo bài tập 1.2.6 ta có :

$$X_{q+1} = \mathrm{Ker}\partial_{q+1} \oplus A_{q+1}.$$

gọi $\delta_{q+1}: A_{q+1} \to \mathrm{Ker}\partial_q$ mà $\delta_{q+1}(a) = \ker\partial_{q+1} \cap A_{q+1} = \{0\}$. Vậy δ_{q+1} là đơn cấu. Bổ sung mô đun 0 và các đồng cấu 0 về hai phía của δ_{q+1} ta được phức q-biệt lập $S^{(q)}$. Hơn nữa rõ ràng là:

$$X \cong \bigotimes_{q:-\infty}^{+\infty} S^{(q)}$$

3.2. Giả sử S là phức q-biệt lập trong đó S_q và S_{q+1} là những nhóm aben hữu hạn sinh với ∂ là đơn cấu từ S_{q+1} vào S_q. Gọi r là hạng của S_q, s là hạng của S_{q+1}, $\{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ là cơ sở của S_{q+1}. Khi đó ta có các kết quả sau :

- $s \leq r$ bởi ∂ là đơn cấu.
- Với mọi $1 \leq i \leq s$, $\mathbb{Z}x_i \cong \mathbb{Z}$ và $\mathbb{Z}\partial(x_i) \cong \mathbb{Z}$
- $S_{q+1} = \mathbb{Z}x_1 \oplus \mathbb{Z}x_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}x_s \underbrace{\oplus A_{s+1} \oplus \ldots}_{\text{r-s lần}} \oplus A_r$

  Trong đó $A_{s+1} = \ldots = A_r = 0$

Gọi $\{\partial(x_1), \ldots, \partial(x_s), y_{s+1}, \ldots, y_r\}$ là cơ sở của S_q. Ta định nghĩa $\partial_i: \mathbb{Z}x_i \to \mathbb{Z}\partial(x_i)$ là đồng cấu nhận được từ sự hạn chế của ∂

trên các $\mathbb{Z}x_i$ nếu $1 \le i \le s$ và $\partial_i : A_i \to \mathbb{Z}y_i$ nếu $s+1 \le i \le r$,

khi đó rõ ràng các $\partial_i = 0$ nếu $s+1 \le i \le r$ và $\partial = \oplus \partial_i$ .Với mọi $1 \le i \le r$

đặt X_i là phức biệt lập với ∂_i là đơn cấu nối đã nói ở trên thì các X_i là phức sơ cấp và $S \cong \oplus X_i$..

3.3. Áp dụng kết quả bài tập 3.1 và bài tập 3.2 ta có kết quả chứng minh.

3.4.

Theo điều kiện bài toán. Ta có các biến đổi dây chuyền từ phức dương X tới phức tầm thường A và ngược lại:

$$\begin{tikzcd}
0 & X_0 \arrow[l] \arrow[d, shift right, "\varepsilon"'] & X_1 \arrow[l, "\partial_1"'] \arrow[d, shift right] & X_2 \arrow[l, "\partial_2"'] \arrow[d, shift right] & \arrow[l] \\
0 & A \arrow[l] \arrow[u, shift right, "f"'] & 0 \arrow[l] \arrow[u, shift right] & 0 \arrow[l] \arrow[u, shift right] & \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Thoả: $\varepsilon f = 1_A$ và tồn tại biến đổi dây chuyền s: $1_X \cong f\varepsilon$ điều này có nghĩa là phức X và phức tầm thường A là tương đương đồng luân với nhau. Vì vậy: $H_n(X) \cong A$, nên ta có được kết luận :

$$H_n(X) = 0 \text{ khi } n > 0 \text{ và } H_0(X) \cong A.$$

3.5.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_{n+2} \arrow[r, "æ_{n+2}"] \arrow[d, "\partial"'] & Y_{n+2} \arrow[r, "\sigma_{n+2}"] \arrow[d, "\partial"'] & K_{n+2} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_{n+1} \arrow[r, "æ_{n+1}"] \arrow[d, "\partial"'] & Y_{n+1} \arrow[r, "\sigma_{n+1}"] \arrow[d, "\partial"'] & K_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_{n} \arrow[r, "æ_{n}"] \arrow[d, "\partial"'] & Y_{n} \arrow[r, "\sigma_{n}"] \arrow[d, "\partial"'] & K_{n} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[r, "æ_{n-1}"] & Y_{n-1} \arrow[r, "\sigma_{n-1}"] & K_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Chứng minh sự xác định của ∂_E.

Cố định $k \in K_{n+1}$ là chu trình, đầu tiên ta chứng minh sự xác định của ∂_E hoàn toàn không phụ thuộc vào sự chọn $y \in Y_{n+1}$ để thoả $\sigma_{n+1}(y) = k$. Thật vậy, nếu có $y, y' \in Y_{n+1}$ sao cho

$$\sigma_{n+1}(y) = \sigma_{n+1}(y') = k$$

Khi đó $\sigma_{n+1}(y - y') = 0$ tức $(y - y') \in \mathrm{Ker}\sigma_{n+1}$.

Từ dòng hai là khớp nên $\ker\sigma_{n+1} = \mathrm{Im}æ_{n+1}$, ắt tồn tại $x'' \in X_{n+1}$ mà $æ_{n+1}(x'') = y - y'$, suy ra

$$y = y' + æ_{n+1}(x'') \qquad (1)$$

Ta có

$$\sigma_n\partial(y) = \partial\sigma_{n+1}(y) = \partial(k) = 0$$

suy ra $\partial(y) \in \mathrm{Ker}\sigma_n$. Lập luận tương tự ta có $\partial(y') \in \mathrm{Ker}\sigma_n$. Do dòng 3 khớp nên $\mathrm{Ker}\sigma_n = \mathrm{Im}æ_n$. Vậy có x, x' $\in X_n$ sao cho

$$æ_n(x) = \partial(y) \ ; \ æ_n(x') = \partial(y') \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta nhận được

$$\begin{aligned} æ_n(x) &= \partial(y) \\ &= \partial\,[y' + æ_{n+1}(x'')] \\ &= \partial(y') + \partial æ_{n+1}(x'') \\ &= æ_n(x') + æ_n\partial(x'') \end{aligned}$$

do đó $æ_n(x - x') = æ_n\partial(x'')$. Từ giả thiết $æ_n$ là đơn cấu, ta nhận được

$$(x - x') = \partial(x'') \text{ hay } x = x' + \partial(x'') \qquad (3)$$

Mặt khác $\partial(x'')$ chính là bờ của X_n, vì vậy từ (3) clsx = clsx'. Điều này chứng tỏ ∂_E không phụ thuộc vào sự lựa chọn $y \in Y_{n+1}$ để thoả $\partial(y) = k$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh ∂_E không phụ thuộc vào sự chon lựa phần tử đại diện của clsk. Thật vậy nếu k, k' $\in K_{n+1}$ mà k, k' là các chu trình và (k – k') bờ của K_{n+1}. Từ σ_{n+2} là toàn ánh ắt tồn tại $y' \in Y_{n+2}$ sao cho

$$\partial\sigma_{n+2}(y') = \sigma_{n+1}\partial(y') = k - k'$$

$$\Rightarrow \ k = k' + \sigma_{n+1}\partial(y') \qquad (4)$$

Lấy $y \in Y_{n+1}$ mà $\sigma_{n+1}(y) = k'$. Khi đó do (4)

$$\sigma_{n+1}[\, y + \partial(y')] = \sigma_{n+1}(y) + \sigma_{n+1}\partial(y') = k$$

Nếu $x, x' \in æ_n$ mà $æ_n(x) = \partial(y)$, $æ_n(x') = \partial\, [y + \partial(y')]$. Khi đó

$$æ_n(x') = \partial(y) + \partial\partial(y') = \partial(y) = æ_n(x)$$

Do $æ_n$ là đơn ánh nên : $x = x'$ điều này dẫn đến $\partial_E\,(clsk) = \partial_E(clsk')$.

Cuối cùng để kiểm tra ∂_E là đồng cấu. Lấy clsk và clsk' nằm trong $H_{n+1}(K)$. Từ chứng minh phần trên ta hoàn toàn có quyền chọn cố định k làm phần tử đại diện cho clsk, k' làm phần tử đại diện cho clsk' và $y, y' \in Y_{n+1}$ thoả $\sigma_{n+1}(y) = k$, $\sigma_{n+1}(y') = k'$. Khi đó

$$\sigma_{n+1}(y + y') = k + k'$$

Lấy $x, x' \in X_n$ mà $æ_n(x) = \partial(y)$ và $æ_n(x') = \partial(y')$, ta có $\partial_E(clsk) = clsx'$, $\partial_E(clsk') = clsx'$. Mặt khác

$$\begin{aligned} æ_n(x + x') &= æ_n(x) + æ_n(x') \\ &= \partial(y) + \partial(y') \\ &= \partial(y + y') \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ

$$\partial_E[cls(k + k')] = cls(x + x')$$

$$\Rightarrow \partial_E(clsk + clsk') = clsx + clsx'$$

$$= \partial_E(clsk) + \partial_E cls(k')$$

Vậy ∂_E là đồng cấu.

3.6.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(K_n, G) \arrow[r, "\sigma_n^*"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathrm{Hom}(Y_n, G) \arrow[r, "æ_n^*"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathrm{Hom}(X_n, G) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(K_{n+1}, G) \arrow[r, "\sigma_{n+1}^*"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathrm{Hom}(Y_{n+1}, G) \arrow[r, "æ_{n+1}^*"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathrm{Hom}(X_{n+1}, G) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(K_{n+2}, G) \arrow[r, "\sigma_{n+2}^*"] & \mathrm{Hom}(Y_{n+2}, G) \arrow[r, "æ_{n+2}^*"] & \mathrm{Hom}(X_{n+2}, G) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Mô tả đồng cấu nối ∂_E^*.

Nếu $f \in \mathrm{Hom}(X_n, G)$ là chu trình, trước hết do $æ_n^*$ là toàn ánh, ắt tồn tại $g \in \mathrm{Hom}(Y_n, G)$ mà $æ_n^*(g) = f$. Khi đó

$$æ_{n+1}^*\delta(g) = \delta æ_n^*(g) = \delta(f) = 0$$

Tức $\delta(y) \in \mathrm{Ker}æ_{n+1}^*$. Do dòng giữa là khớp nên $\mathrm{Ker}æ_{n+1} = \mathrm{Im}\sigma_{n+1}^*$, ắt tồn tại $h \in \mathrm{Hom}(K_{n+1}, G)$ mà $\sigma_{n+1}^*(h) = \delta(g)$. Bởi $\sigma_{n+2}^*\delta(h) = \delta\sigma_{n+1}^*(h) = \delta\delta(g) = 0$. Tức h là chu trình của $\mathrm{Hom}(K_{n+1},G)$, ta mô tả các lập luận trên bằng biểu đồ miêu tả sau.

$$\begin{tikzcd}
 & g \arrow[d, "\delta"] & f \in \mathrm{Hom}(X_n, G) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(K_{n-1}, G) \ni h \arrow[r, "\sigma_{n+1}^*"] \arrow[d] & \delta(g) \arrow[r, "æ_{n+1}^*"] \arrow[d, "\delta"] & 0 \\
 \arrow[r, "\sigma_{n+2}^*"] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Đặt ∂_E^*(clsf) = clsh. Đồng cấu nối ∂_E^* chính là đồng cấu $H^n(X, G)$ vào $H^{n+1}(K, G)$. Việc kiểm tra tính đúng đắn của ∂_E^* được tiến hành hoàn toàn tương tự như bài tập 3.5.

3.7. Tác động hàm tử hiệp biến Hom(G, -) lên dãy khớp ngắn chẻ ra các phức

$$E : 0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

Ta được dãy khớp ngắn chẻ ra các phức nhóm aben.

$$E^* : 0 \to \mathrm{Hom}(G, X) \to \mathrm{Hom}(G, Y) \to \mathrm{Hom}(G, K) \to 0$$

Bởi với mỗi n∈ dãy

$$0 \to \mathrm{Hom}(G, X_n) \to \mathrm{Hom}(G, Y_n) \to \mathrm{Hom}(G, K_n) \to 0$$

là khớp và chẻ, do hàm tử (G, -) bảo toàn tính khớp chẻ của dãy

$$0 \longrightarrow X_n \longrightarrow Y_n \longrightarrow K_n \longrightarrow 0$$

Tương tự cách xây dựng ∂_E trong định lý 1 chương III, áp dụng định lý dãy dồng điều khớp, ta có dãy khớp đồng điều.

$$\ldots H_{n+1}(G, K) \xrightarrow{\partial_{E^*}} H_n(G, X) \to H_n(G, Y) \to H_n(G, K) \xrightarrow{\partial_{E^*}}$$

$$\to H_{n-1}(G, X) \to H_{n-1}(G, Y) \to H_{n-1}(G, K) \to \ldots$$

3.8. Từ dãy khớp ngắn chẻ ra các phức

$$E : 0 \to A \to B \to C \to 0$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có các dãy khớp ngắn chẻ ra sau:

$$0 \to Hom(C, X_n) \to Hom(B, X_n) \to Hom(A, X_n) \to 0$$

$$0 \to Hom(X_n, A) \to Hom(X, B) \to Hom(X, C) \to 0$$

Ap dụng định lý dãy đối đồng điều khớp ta được:

a) Dãy đối đồng điều khớp

$$\ldots H^{n+1}(A, X) \to H^n(C, X) \to H_n(B, X^n) \to H^n(A, X) \to$$

$$\to H^{n-1}(C, X) \to H^{n-1}(B, X) \to H^{n-1}(A, X) \to \ldots$$

b) Dãy đối đồng điều khớp

$$\ldots H^{n-1}(X, C) \to H^n(X, A) \to H^n(X, B) \to H^n(X, C) \to$$

$$\to H^{n-1}(X, A) \to H^{n-1}(X, B) \to H^{n-1}(X, C) \to \ldots$$

3.9. Tác động hàm tử Hom(- , X) lên dãy khớp ngắn

$$E : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

Ta được dãy khớp ngắn ra các phức nhóm aben.

$$E^* : 0 \to Hom(C, X) \to Hom(B, X) \to Hom(A, X) \to 0$$

Bởi với mỗi $n \in \mathbb{N}$ dãy

$$0 \to Hom(C, X_n) \to Hom(B, X_n) \to Hom(A, X_n) \to 0$$

là khớp, do X_n là mô đun nội xạ và hàm tử Hom(- , X_n) bảo toàn tính khớp chẻ của dãy khớp ngắn E.

Áp dụng định lý dãy đối đồng điều khớp, ta có dãy khớp đối đồng điều.

$$\ldots H^{n+1}(C, X) \to H^n(A, X) \to H^n(B, X^n) \to H^n(C, X) \to$$

$$\to H^{n-1}(A, X) \to H^{n-1}(B, X) \to H^{n-1}(C, X^{n-1}) \to \ldots$$

3.10.

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
{} & X_{n-1} \arrow[l] \arrow[d, shift right, "f_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n-1}"] \arrow[dr, "s_{n-1}"] & X_n \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] \arrow[dr, "s_n"] & X_{n+1} \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, shift right, "f_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n+1}"] & {} \arrow[l] \\
{} & X'_{n-1} \arrow[l] & X'_n \arrow[l, "\partial'"] & X'_{n+1} \arrow[l, "\partial'"] & {} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Từ f đồng luân dây chuyền với g, do đó tồn tại s sao cho

$$s_{n-1}\partial + \partial' s_n = f_n - g_n$$

Suy ra $f_n - s_{n-1}\partial = g_n + \partial' s_n$ (1)

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
{} & X_{n-1}\oplus X_n' \arrow[l] \arrow[d, "h_n"] \arrow[ddr, "\text{æ}_n"] & X_n\oplus X_{n+1}' \arrow[l, "\delta_f"'] \arrow[d, "h_{n+1}"] \arrow[ddr, "\text{æ}_{n+1}"] & X_{n+1}\oplus X_{n+2}' \arrow[l, "\delta_f"'] \arrow[d, "h_{n+2}"] & {} \arrow[l] \\
{} & X_{n-1}\oplus X_n' \arrow[l] \arrow[d, "t_n"] & X_n\oplus X_{n+1}' \arrow[l, "\delta_g"'] \arrow[d, "t_{n+1}"] & X_{n+1}\oplus X_{n+2}' \arrow[l, "\delta_g"'] \arrow[d, "t_{n+2}"] & {} \arrow[l] \\
{} & X_{n-1}\oplus X_n' \arrow[l] & X_n\oplus X_{n+1}' \arrow[l, "\delta_f"'] & X_{n+1}\oplus X_{n+2}' \arrow[l, "\delta_f"'] & {} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Với mọi $n \in \mathbb{Z}$ ta định nghĩa

$$h_{n+1} : X_n \oplus X_{n+1}' \longrightarrow X_n \oplus X_{n+1}'$$
$$(x, x') \to (x, s_n(x) + x')$$

$$t_{n+1} : X_n \oplus X_{n+1}' \longrightarrow X_n \oplus X_{n+1}'$$
$$(x, x') \to (x, -s_n(x) + x')$$

Khi đó $h = \{h_n\}$ và $t =\{t_n\}$ là các biến đổi dây chuyền tương ứng từ M(f) vào M(g) và từ M(g) vào M(f). Thật vậy, với mọi $n \in \mathbb{Z}$, với mọi $(x, x') \in X_n \oplus X_{n+1}'$, ta có

$$\begin{aligned}
h_n\delta_f(x, x') &= h_n(-\partial(x), \partial'(x')) + f(x) \\
&= (-\partial(x), -s_{n-1}\partial(x) + \partial'(x') + f(x)) \\
&= (-\partial(x), \partial{,}s_n(x) + \partial'(x') + g(x)) \quad \text{(từ (1))} \\
&= \delta_g(x, s_n(x) + x') \\
&= \delta_g h_{n+1}(x, x')
\end{aligned}$$

vậy $h_n\delta_f = \delta_g h_{n+1}$

$$\begin{aligned}
\delta_f t_{n+1}(x, x') &= \delta_f(x, -s_n(x) + x') \\
&= (-\partial(x), -\partial' s_n(x) + \partial'(x') + f(x)) \\
&= (-\partial(x), s_{n-1}\partial(x) + \partial'(x') + g(x)) \quad \text{(từ (1))} \\
&= t_n(-\partial(x), \partial'(x') + g(x)) \\
&= t_n\delta_g(x, x')
\end{aligned}$$

vậy $\delta_f t_{n+1} = t_n\delta_g$

Hơn nữa, với mọi $n \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
t_{n+1}h_{n+1}(x, x') &= t_{n+1}(x, s_n(x) + x') \\
&= (x, - s_n(x) + s_n(x) + x') \\
&= (x, x')
\end{aligned}
$$

Vậy $th = 1_{M(f)}$. Tương tự ta có $ht = 1_{M(g)}$

Bây giờ với mọi $n \in \mathbb{Z}$, ta định nghĩa đồng cấu luân dây chuyền

$$
\begin{aligned}
æ_n : X_{n-1} \oplus X_n' &\to X_n \oplus X_{n+1}' \\
(x, x') &\to 0
\end{aligned}
$$

Khi đó

$$
\begin{aligned}
æ_n\delta_f + \delta_f æ_{n+1} = 0 \\
&= 1_{X_n \oplus X_{n+1}'} - 1_{X_n \oplus X_{n+1}'} \\
&= 1_{X_n \oplus X_{n+1}'} - t_{n+1}h_{n+1}
\end{aligned}
$$

suy ra $1_{M(f)} \approx th$. Hoàn toàn tương tự ta có $1_{M(g)} \approx ht$. Vậy

$M(f) \cong M(g)$, do đó $H^n(M(f)) \cong H_n(M(g))$. Vì $f \cong g: X \to X'$ nên $f_* = g_* : H_n(X) \to H_n(X')$ với mọi n. Từ các kết quả có được ở trên, hiển nhiên hai dãy đồng điêù khớp tương ứng với hai nón ánh xạ M(f) và M(g) sau:

$$
\ldots \to H_n(X') \xrightarrow{i_*} H_n(M_f) \xrightarrow{\pi_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(X') \to \ldots
$$

$$
\ldots \to H_n(X') \xrightarrow{i_*} H_n(M_f) \xrightarrow{\pi_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(X') \to \ldots
$$

là đẳng cấu.

3.11.

Cách 1:

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{h} & B' & \xrightarrow{t} & C' & & \end{array}$$

$$\mathrm{Ker}\alpha \xrightarrow{f'} \mathrm{Ker}\beta \xrightarrow{g'} \mathrm{Ker}\gamma \xrightarrow{\partial} A'/\mathrm{Im}\alpha \xrightarrow{h'} B'/\mathrm{Im}\beta \xrightarrow{t'} C'/\mathrm{Im}\gamma$$

Định nghĩa

f': $\mathrm{Ker}\alpha \to \mathrm{Ker}\beta$ chính là vết của f trên $\mathrm{Ker}\alpha$

g': $\mathrm{Ker}\beta \to \mathrm{Ker}\gamma$ chính là vết của g trên $\mathrm{Ker}\beta$

$$h' : A'/\mathrm{Im}\alpha \longrightarrow B'/\mathrm{Im}\beta$$
$$a + \mathrm{Im}\alpha \to h(a) + \mathrm{Im}\beta$$

$$t': B'/\mathrm{Im}\beta \longrightarrow C'/\mathrm{Im}\gamma$$
$$b' + \mathrm{Im}\beta \to t(b') + \mathrm{Im}\gamma$$

Đồng cấu nối ∂ : $\mathrm{Ker}\gamma \to A'/\mathrm{Im}\alpha$ được xác định như sau. Với mọi $c \in \mathrm{Ker}\gamma$, từ g là toàn ánh ắt có $b \in B$ sao cho $g(b) = c$. Ta có : $t\beta(b) = \gamma g(b) = \gamma(c) = 0$ tức $\beta(b) \in \mathrm{Ker}t$. Dòng là khớp nên $\mathrm{Ker}t = \mathrm{Im}h$, do đó tồn tại $a' \in A'$ sao cho $h(a') = \beta(b)$. Đặt

$\partial(c) = a' + \mathrm{Im}\alpha$. Việc kiểm tra tính đúng đắn của ∂ nghĩa là không phụ thuộc vào sự chon lựa b sao cho g(b) = c, được thực hiện hoàn toàn tương tự như trong bài tập 3.5

Ta có

$$\begin{cases} \beta f(\mathrm{Ker}\alpha) = h\alpha(\mathrm{Ker}\alpha) = 0 \\ \\ \gamma g(\mathrm{Ker}\beta) = t\beta(\mathrm{Ker}\beta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\mathrm{ker}\alpha) \subseteq \mathrm{Ker}\beta \\ \\ g(\mathrm{Ker}\beta) \subseteq \mathrm{Ker}\gamma \end{cases}$$

nên f' và g' được định nghĩa tốt. Bây giờ ta kiểm tra h' và t' được định nghĩa tốt. Thật vậy, giả sử ta có $x' + \mathrm{Im}\alpha = y' + \mathrm{Im}\alpha$ khi đó $(x' - y') \in \mathrm{Im}\alpha$. Vậy có $a \in A$ mà $h(x') - h(y') = h(x' - y') = h\alpha(a) = \beta t(a)$ suy ra $h(x') - h(y') \in \mathrm{Im}\beta$ tức

$$h(x') + \mathrm{Im}\beta = h(y') + \mathrm{Im}\beta$$

do đó h' được định nghĩa tốt. Lập luận tương tự ta có t' cũng định nghĩa tốt.

Cuối cùng ta kiểm tra dãy sau khớp. Hiển nhiên $\mathrm{Im}f' \subseteq \mathrm{Ker}g'$. Lấy $b \in \mathrm{Ker}g'$, khi đó $g'(b) = g(b) = 0$. Do dòng là khớp nên có $a \in A$ mà $f(a) = b$. Mặt khác $b \in \mathrm{Ker}\beta$ nên $\beta(b) = 0$, suy ra

$$h\alpha(a) = \beta f(a) = \beta(b) = 0.$$

Từ h là đơn cấu nên ta có $\alpha(a) = 0$. Vậy $\mathrm{Ker}g' \subseteq \mathrm{Im}f'$ điều này dẫn tới

$$\mathrm{Im}f' = \mathrm{Ker}g' \qquad (1)$$

Lấy $b \in \mathrm{Ker}\beta$, khi đó tồn tại $a' \in A$ sao cho $h(a') = \beta(b) = 0$. Từ h là đơn cấu nên $a' = 0$, suy ra $\partial g(b) = \partial g'(b) = a' + \mathrm{Im}\alpha = 0$ tức $g'(b) \subseteq \mathrm{Ker}\,\partial$.

Để thấy bao hàm ngược ta lấy $c \in \mathrm{Ker}\partial$, khi đó tồn tại $b \in B$, $a' \in \mathrm{Im}\alpha$ sao cho $g(b) = c$ và $h(a') = \beta(b)$. Từ dòng là khớp do đó có $a \in A$ mà $\alpha(a) = a'$. Vậy

$$h(a') = h\alpha(a) = \beta f(a) = \beta(b)$$

suy ra $\beta[b - f(a)] = 0$ tức $(b - f(a)) \in \mathrm{Ker}\beta$. Hơn nữa,

$$g'[b - f(a)] = g[b - f(a)] = g(b) - gf(a) = c$$

suy ra $\mathrm{Ker}\partial \subseteq \mathrm{Im}g'$ điều này dẫn đến

$$\mathrm{Ker}\partial = \mathrm{Im}g' \qquad (2)$$

Lấy $c \in \mathrm{Ker}\gamma$, khi đó tồn tại $b \in B$ sao cho $g(b) = c$, $h(a') = \beta(b)$ và $\partial(c) = a' + \mathrm{Im}\alpha$. Vì vậy

$$\begin{aligned} h'\partial(c) &= h'(a' + \mathrm{Im}\alpha) \\ &= h(a') + \mathrm{Im}\beta \\ &= \beta(b) + \mathrm{Im}\beta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tức $\mathrm{Im}\partial \subseteq \mathrm{Ker}h'$.

Lấy $a' + \mathrm{Im}\alpha$ mà $h'(a' + \mathrm{Im}\alpha) = 0$. Khi đó $h(a') \in \mathrm{Im}\beta$ vậy có $b \in B$ mà $h(a') = \beta(b)$. Theo định nghĩa của ∂ thì

$$\partial g(b) = a' + \mathrm{Im}\alpha$$

Mặt khác $\partial g(b) = t\beta(b) = th(a') = 0$, suy ra $g(b) \in \mathrm{Ker}\gamma$ tức $\mathrm{Ker}h' \subseteq \mathrm{Im}\partial$ điêù này dẫn tới

$$\mathrm{Ker}h' = \mathrm{Im}\partial \qquad (3)$$

Hiển nhiên $t'h' = 0$ do đó $\mathrm{Im}h' \subseteq \mathrm{Ker}t'$.

Lấy $b' + \mathrm{Im}\beta$ mà $t(b' + \mathrm{Im}\beta) = 0$. Khi đó, $t(b') \in \mathrm{Im}\gamma$, vì vậy tồn tại $c \in C$ mà $\gamma(c) = t(b')$. Từ g là toàn ánh ắt có $b \in B$ sao cho $g(b) = c$, do đó

$$t(b') = \gamma(c) = \gamma g(b) = t\beta(b)$$

$$t[b' - \beta(b)] = 0$$

Tức $b' - \beta(b) \in \mathrm{Ker}t$. Từ dòng là khớp nên $\mathrm{Ker}t = \mathrm{Im}h$ do đó tồn tại $a' \in A'$ mà $h(a') = b' - \beta(b)$ suy ra

$$h'(a' + \mathrm{Im}\alpha) = h(a)' + \mathrm{Im}\beta$$

$$= b' - \beta(b) + \mathrm{Im}\beta$$

$$= b' + \mathrm{Im}\beta$$

Vậy $\mathrm{Ker}t' \subseteq \mathrm{Im}h'$. Điều này dẫn đến

$$\mathrm{Ker}t' = \mathrm{Im}h' \qquad (4)$$

Các đẳng thức (1), (2), (3) và (4) cho ta điều cần chứng minh.

Cách 2:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A/\mathrm{Kerf} \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha'"'] & B \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathrm{Imt} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & 0 \arrow[d, phantom, "\gamma"] \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\partial"'] & B' \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Sử dụng biểu đồ trên, dễ thấy do h đơn cấu và hình vuông đầu giao hoán nên ta có Kerf $\subseteq$ Kerα, và do g toàn cấu và hình vuông sau giao hoán mà $\gamma(C) \subseteq$ Imt. Từ đó ta có dãy khớp ngắn các phức : (hình ở bên trên)

Trong đó f'(a + kerf) = f(a) là đơn cấu và α'(a + Kerf) = α(a) . Áp dụng định lý dãy đồng điều khớp ta có dãy khớp sau:

$$0 \to \mathrm{Ker}\alpha' \to \mathrm{Ker}\beta \to \mathrm{Ker}\gamma \to A'/\alpha'(A) \to$$
$$\to B'/\,\beta(B) \to \mathrm{Imt}\,/\,\gamma(C) \to 0$$

Chú ý rằng: Ker' = Kerα / Kerf cho ta phép chiếu:

$$p: \mathrm{Ker}\alpha \to \mathrm{Ker}\alpha\,/\,\mathrm{Ker}\beta = \mathrm{Ker}\alpha'$$

là toàn cấu. Từ $\alpha'(A) = \alpha(A)$ cho ta $A'/\alpha'(A) = A'/\alpha(A)$ và phép nhúng j': Imt $\to$ C' cho ta nhúng j_* : Imt/ γ(c) $\to$ C'/γ(C).

Như vậy nối hai đầu dãy trên các toàn cấu p và phép nhúng j_* ta được dãy sau là khớp:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}\alpha \arrow[r] \arrow[dr] & \operatorname{Ker}\beta \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\gamma \arrow[r] & A'/\alpha(A) \arrow[r] & B'/\beta(B) \arrow[r] \arrow[dr] & C'/\gamma(C) \\
& \operatorname{Ker}\alpha' & & & & \operatorname{Im}t/\gamma(C) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

3.12.($\Rightarrow$) Giả sử $u \in G$ mà $u \equiv u_i$ với một i nào đó. Gọi

$$x := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j \ , \quad y := \sum_{j=1}^{m} \beta_j u_j \ ,$$

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = \sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1$$

là hai điểm phân biệt nằm trong G mà đoạn thẳng đi qua hai điểm đó chứa u. Phương trình đoạn thẳng đi qua x, y có dạng

$$f(t) = tx + (1 - t)y = \sum_{j=1}^{m} [t\alpha_j + (1 - t)\beta_j]u_j \ , \qquad t \in [0, 1]$$

do $u \in f([0, 1])$ nên tồn tai $t_0 \in [0, 1]$ mà

$$u = u_i = \sum_{j=1}^{m} [t\alpha_j + (1 - t)\beta_j]u_j$$

Tập hợp $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ độc lập afin nên ta có

$$\begin{cases} t_0\alpha_j + (1 - t_0)\beta_j = 0 & \text{nếu } i \neq j \quad (1) \\ t_0\alpha_j + (1 - t_0)\beta j = 1 & \text{nếu } i = j \quad (2) \end{cases}$$

Nếu $t_0 = 0$ hoặc $t_0 = 1$ thì $u \equiv y$ hoặc $u \equiv x$, khi đó ta có điều chứng minh. Giả sử $t_0 \in (0, 1)$ từ (1) ta có

$$t_0\alpha_j + (1 - t_0)\beta_j = 0 \quad \text{với mọi } j \neq i$$

$$\Leftrightarrow t_0(\alpha_j - \beta_j) + \beta_j = 0 \quad \text{với mọi } j \neq i$$

cộng thêm giả thiết các $\beta j \geq 0$, ta nhận được $\alpha_j \leq \beta_j$, $\forall j \neq i$. Mặt khác

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = \sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1$$

nên $\alpha_i \geq \beta_i$. Vậy từ (2) ta nhận được

$$1 = t_0\alpha_i + (1 - t_0)\beta_i \leq t_0\alpha_i + (1 - t_0)\alpha_i = \alpha_i \qquad (3)$$

Bởi $\alpha_i \leq 1$ nên để đẳng thức ở (3) xảy ra ta phải có

$$\alpha_i = \beta_i = 1$$

suy ra $\alpha_j = \beta_j = 0$ với mọi $j \neq i$ hay $x \equiv y \equiv u$. Điều này vô lý với giả thiết x và y là hai điểm phân biệt, do đó ta phải có $t_0 = 1$ hoặc $t_0 = 0$ (đpcm).

($\Leftarrow$) Giả sử $u := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j \in G$ là điểm luôn nằm ở hai đầu mút của đoạn thẳng bất kỳ nằm trong G chứa nó. Từ các $\alpha_j \geq 0$ và $\sum\alpha_j = 1$ ắt tồn tại chỉ số $i \in \{0, 1, . . . , m\}$ sao cho $0 < \alpha_i \leq 1$. Nếu $\alpha_i \neq 1$. Xét phương trình đoạn thẳng nằm trong G

$$f(t) = tu_i + (1 - t)\sum_{i \neq j} \alpha_j (1 - \alpha_i)^{-1} u_j \qquad t \in [0,1]$$

khi đó

$$f(\alpha_i) = \alpha_i u_i + (1 - \alpha_i) \sum_{i \neq j} \alpha_j (1 - \alpha_i)^{-1} u_j = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j = u$$

tức $u \in f([0,1])$. Theo giả thiết, $u \equiv u_j$ hoặc $u \equiv \sum_{i \neq j} \alpha_j (1 - \alpha_i)^{-1} u_j$

Nếu $u \equiv u_i$ thì ta có $\alpha_i = 1$ mâu thuẫn với giả thiết $\alpha_j \neq 1$. Còn nếu $u \equiv \sum_{i \neq j} \alpha_j (1 - \alpha_i)^{-1} u_j$ thì ta có $\alpha_i = 0$ điều này cũng mâu thuẫn với giả thiết $\alpha_i \neq 0$. Tóm lại ta có $\alpha_i = 1$, điều này cho ta $u \equiv u_i$.

Cách khác:

Ta chứng minh bài toán bằng mệnh đề phản đảo. Thật vậy nếu $u \neq u_j$ với mọi j thì $u = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j$ với $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$ và $0 \leq \alpha_j < 1$. Suy ra có ít nhất $\alpha_i \in (0, 1)$. Khi đó:

$$u = \alpha_i u_i + (1 - \alpha_k) \sum_{i \neq j} \alpha_j (1 - \alpha_i)^{-1} u_j \text{ với } u' = \sum_{i \neq j} \alpha_j (1 - \alpha_i)^{-1} u_j$$

phần tử thuộc bao lồi đã cho. Điều này có nghĩa u thuộc vào đoạn thẳng nối u_i và u' và $u \notin \{u_i, u'\}$.

Nếu u thuộc đoạn thẳng nối $a = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j$ và $b = \sum_{j=1}^{m} \beta_j u_j$ với $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = \sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1$, $0 \leq \alpha_j, \beta_j \leq 1$ và $u \neq a$, $u \neq b$ thì trước hết $a \neq b$ do đó tồn tại ít nhất hai chỉ số $i \neq l$ mà $\alpha_i \neq \beta_l$. Đồng thời tồn tại $t \in (0, 1)$ mà $u = ta + (1 - tb) = \sum_{j=1}^{m} (t\alpha_j + (1 - t)\beta_j) u_j$. Từ các điều kiện trên ta có: $\alpha_i + (1 - \beta_i) \neq 0$ và $t\alpha_l + (1 - t)\beta_l \neq 0$ tức u phụ thuộc các u_j và không thể đồng thời trùng với bất kỳ một u_j nào.

3.13. Giả sử X là không gian tô pô chỉ có một điểm a. Khi đó trong mỗi n-chiều, X chỉ có một đơn hình kỳ dị đó là ánh xạ liên tục $T_n : \Delta^n \to \{a\}$ mang toàn bộ Δ^n vào một điểm a. Suy ra mỗi toán tử lấy biên d_iT_n chính là T_{n-1} cho mỗi i = 0,1, . . . , n. Từ ∂T là tổng đan dấu của các toàn tử lấy biên d_iT, suy ra $\partial T_{2m} = T_{2m-1}$ và $\partial T_{2m-1} = 0$. Điều này chứng tỏ nếu số chiều là chẳn thì S(X) không có chu trình ngoại trừ 0, còn khi số chiều lẻ mọi phần tử của S_{2n-1} đều là chu trình và cũng là bờ. Suy ra

$$H_n(X) = 0 \text{ khi } n \geq 1 \text{ và } H_0(X) \cong$$

3.14. Biễu diễn một điểm nằm trong đơn hình mẫu n-chiều bằng toạ độ hướng tâm $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ của nó. Khi đó đơn hình kỳ dị n-chiều T có thể xem như hàm n +1 biến x_i, trong đó các biến x_i không âm và $\sum_{i=0}^{n} x_i = 1$. Toàn tử lấy biên thứ i có thể xét như hàm số được định nghĩa bởi

$$d_iT(x_0,x_1, \ldots, x_n) = T(x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

nghĩa là lấy biến thứ i bằng giá trị 0. Để chứng minh công thức $d_id_jT = d_{j-1}d_iT$ với $i < j$, ta tiến hành như sau đầu tiên đặt $x_j = 0$ và sau đó $x_i = 0$ trong $T(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ với $i < j$ thì cũng như đầu tiên đặt $x_i = 0$, đánh chỉ số lại rồi đặt 0 vào vị trí $j - 1$ mới.

3.15.

Do yêu cầu bài toán chỉ đòi hỏi là $H_0(X) \cong X$, nên ta chỉ cần chứng minh dãy

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\varepsilon} S_0(X) \xleftarrow{\partial} S_1(X)$$

là dãy khớp. Thật vậy: nếu

$z = a_1 + \ldots + a_k - b_1 - \ldots - b_k \in \mathrm{Ker}\varepsilon \subseteq S_0(X)$, trong đó các a_i, b_j là các đơn hình kì dị 0-chiều biến Δ_0 vào a_i hay b_j thuộc X, thì do $\varepsilon(z) = 0$ nên $k = t$ do đó $z = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_t - b_t)$ điều này chứng tỏ hệ sinh của $\mathrm{Ker}\varepsilon$ gồm topàn các phần tử dạng $(a_j - b_j)$. Tuy nhiên do X là không gian liên thông tuyến tính nên ắt tồn tại đơn hình kì dị T biên $\Delta_1 \to X$ mà hai biên là a_i, b_i do đó $\partial T = a_i - b_i$. Vậy hệ sinh của Imt cũng bao gồm các phần tử $(a_i - b_i)$ như $\mathrm{Ker}\alpha$, suy ra $\mathrm{Im}\partial = \mathrm{Ker}\varepsilon$ (đpcm).

3.16. Giả sử C là tập lồi trong không gian Euclide, cố định điểm $w \in C$, gọi α là ánh xạ hằng đi từ C vào $\{w\}$ định nghĩa ánh xạ

$$\varphi : C \times [0, 1] \longrightarrow C$$
$$\varphi(u, t) \to tw + (1 - t)u$$

Khi đó

$$\varphi(u, 0) = 0.w + (1 - 0)u = u = 1_C(u)$$

$$\varphi(u, 1) = 1.w + (1 - 1)u = w = \alpha(u)$$

Điều này chứng tỏ C co rút vào điểm $w \in C$

ii) Giả sử X là không gian tô pô co rút vào điểm $a \in X$, khi đó tồn tại ánh xạ liên tục $\varphi : X \times [0, 1] \to X$ sao cho $\varphi(x, 0) = x$ và $\varphi(x, 1) = a$, với mọi $x \in X$.

Xét biểu đồ

$$
\begin{tikzcd}
{} & \mathbb{Z} \arrow[l] \arrow[d] & S_0(X) \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[ddr, "s_0"] & S_1(X) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d] \arrow[ddr, "s_1"] & S_2(X) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d] & {} \arrow[l] \\
{} & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[l] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & {} \arrow[l] \\
{} & \mathbb{Z} \arrow[l] & S_0(X) \arrow[l, "\varepsilon"'] & S_1(X) \arrow[l, "\partial"'] & S_2(X) \arrow[l, "\partial"'] & {} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Trong biểu đổ trên đồng cấu ε là đồng cấu mang các đơn hình kỳ dị 0-chiều vào phần tử 1 của $\mathbb{Z}$. Đồng cấu $f : \mathbb{Z} \to S_0(X)$ là đồng cấu mang 1 vào đơn hình 0-chiều ánh xạ vào a. Từ định nghĩa trên dễ dàng thấy được

$$\varepsilon f = 1 \qquad (1)$$

với mọi $n \geq 0$, đồng luân dây chuyền s được xác định như sau : $s_n : S_n(X) \to S_{n+1}(X)$ cho bởi

$$s_n T(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \varphi(T(x_1, \ldots, x_n), x_0)$$

Từ các ánh xạ φ là ánh xạ liên tục do đó s_n được định nghĩa tốt. Theo định nghĩa này, với mọi $n \geq 1$, ta có

$$\begin{aligned} d_0 s_n T(x_0, x_1, \ldots, x_n) &= s_n T(0, x_1, \ldots, x_n) \\ &= \varphi(T(x_1, \ldots, x_n), 0) \\ &= T(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad d_0 s_n T = T \qquad (2)$$

$$d_{i+1} s_n T(x_0, x_1, \ldots, x_n) = s_n T(x_0, \ldots, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_n)$$

$$= \varphi(T(x_1, \ldots, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_n), x_0)$$

$$= s_{n-1} d_i T(x_0, \ldots, x_n)$$

$$\Rightarrow \quad d_{i+1} s_n T = s_{n-1} d_i T \qquad (3)$$

Tại n = 0, ta có

$$d_1 s_0 T(x_0, x_1) = s_0 T(1, 0)$$

$$= \varphi(T(0), 1)$$

$$= a = f\varepsilon T(x_0, x_1)$$

$$\Rightarrow \quad d_1 s_0 T = f\varepsilon T \qquad (4)$$

Với mọi n > 0 ta có

$$\partial s_n(T) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i s_n T$$

$$= T + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i d_i s_n T \quad \text{(theo (2))}$$

$$= T + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i s_{n-1} d_{i-1} T \quad \text{(theo (3))}$$

$$= T + s_{n-1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i d_{i-1} T$$

$$= T - s_{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i d_i T \qquad \text{(đổi biến)}$$

$$= T - s_{n-1}\partial T$$

Suy ra: $\qquad s_{n-1}\partial + \partial s_n = 1 \qquad (5)$

Tại n = 0, ta có

$\partial s_0 T = d_0 s_0 T - d_1 s_o T = T - f\varepsilon(T)$

Suy ra $\qquad \partial s_0 = 1 - f\varepsilon \qquad (6)$

Từ (1), (5) và (6), chứng minh hoàn toàn tương tự như trong bài tập 3.4 ta có được

$$H_0(S(X)) \cong \mathbb{Z} \text{ và } H_n(S(X)) = 0 \quad \text{với } n > 0.$$

Cách khác:(câu ii)

Vì X co rút vào điểm $x_0 \in X$ nên các ánh xạ liên tục 1_X và $\varphi(X)$ là đồng luân với nhau . Do đó $H_n(1_X) = H_n(\varphi) : H_n(S(X)) \to H_n(S(X))$ với mọi n. Vì rằng $H_n(1_X) = 1_{Hn(S(X))}$, nên để chứng minh $H_n(S(X)) = 0$ với mọi n > 0, ta cần chứng minh $H_n(\varphi) = 0$. Trước hết dễ thấy rằng phức kì di của không gian chỉ gồm một điểm $\{x_0\}$ là $S(\{x_0\})$:

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{1} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \leftarrow \ldots$$

do vậy $H_n(S(\{x_0\})) = 0$, vói mọi n và $H_n(S(\{x_0\})) \cong \mathbb{Z}$. Ta phân tích ánh xạ φ thành tích hai ánh xạ:

$$X \xrightarrow{\varphi_0} \{x_0\} \xrightarrow{j} X$$

và do đó ta được $H_n(\varphi) = H_n(j) . H_n(\varphi_0)$ mà hiển nhiên là $H_n(\varphi_0) = 0$ với mọi $n > 0$ bởi $H_n(S(\{x_0\})) = 0$. Vậy $H_n(\varphi) = 0$ với mọi n. Khi $n = 0$, do $H_n(\varphi) = H_0(1_X)$, nên $H_0(\varphi_0)$ phải là đơn cấu và do đó là đẳng cấu : $H_0(\varphi_0) \cong H_0(S(\{x_0\})) \cong \mathbb{Z}$.

CHƯƠNG IV

4.1. Giả sử A là R – mô đun. Ta đã biết mọi mô đun đều nhúng vào được một mô đun nội xạ nào đó. Do đó tồn tại dãy khớp

$$0 \to A \xrightarrow{\delta^0} X^0$$

Trong đó X^0 là mô đun nội xạ. Lại vì X^0/A được nhúng vào mô đun nội xạ X^1, nên ta có dãy đồng cấu

$$X^0 \xrightarrow{\pi_1} X^0/A \xrightarrow{i_1} X^1$$

đặt $\delta^1 = i_1\pi_1$, khi đó δ^1 là đồng cấu đi từ X^0 vào X^1 với

$$\mathrm{Ker}\delta^1 = (i_1\pi_1)^{-1}(0) = A.$$

Tiếp theo $X^1/\mathrm{Im}\delta^1$ được nhúng vào mô đun nội xạ X^2 nên ta có dãy đồng cấu

$$X^1 \xrightarrow{\pi_2} X^1/\mathrm{Im}\delta^1 \xrightarrow{i_2} X^2$$

Đặt $\delta^2 = i_2\pi_2$, khi đó δ^2 là dồng cấu đi từ X^1 vào X^2 có

$$\mathrm{Ker}\delta^2 = (i_2\pi_2)^{-1}(0) = \mathrm{Im}\delta^1.$$

Bằng quy nạp toán học ta thiết lập được dãy khớp các mô đun nội xạ

$$0 \to A \xrightarrow{\delta^0} X^0 \xrightarrow{\delta^1} X^1 \xrightarrow{\delta^2} X^2 \to \ldots$$

Dãy trên chính là phép giải nội xạ mà ta cần tìm.

Để chứng minh hai phép giải nội xạ tương đương đồng luân với nhau. Trước tiên ta cần hai mệnh đề sau.

Mệnh đề 1. Cho $h : A \to B$ là đồng cấu của mô đun A vào mô đun B và

$$X : 0 \to A \xrightarrow{\delta} X^0 \xrightarrow{\delta} X^1 \xrightarrow{\delta} X^2 \to \ldots$$

là phép giải nội xạ bất kỳ của A, và

$$Y : 0 \to B \xrightarrow{\sigma} Y^0 \xrightarrow{\sigma} Y^1 \xrightarrow{\sigma} Y^2 \to \ldots$$

là phép giải nội xạ bất kỳ của B. Khi đó tồn tại các đồng cấu

$$\{f_n : X^n \to Y^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

sao cho biểu đồ sau giao hoán

$$\begin{tikzcd}
X : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "h"'] & X^0 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f_0"'] & X^1 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f_1"'] & X^2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & \ldots \arrow[r, "\delta"] & X^n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"'] & \ldots \\
Y : 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\sigma"] & Y^0 \arrow[r, "\sigma"] & Y^1 \arrow[r, "\sigma"] & Y^2 \arrow[r] & \ldots \arrow[r, "\sigma"] & Y^n \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Nghĩa là $\{f_n : X^n \to Y^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ và h lập thành biền đổi dây chuyền từ X vào Y

Chứng minh.

Xét biểu đồ

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r, "\delta^0"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr] & X^0 \arrow[d, "f_0"'] \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\sigma^0"] & Y^0
\end{tikzcd}$$

Vì δ^0 là đơn cấu và Y^0 là mô đun nội xạ nên tồn tại f_0 từ X^0 vào Y^0 sao cho hình vuông bên phải giao hoán nghĩa là

$$f_0\delta^0 = \sigma^0 h$$

Giả sử với $0 \le m < n$ ta đã xây dựng được các đồng cấu

$$f_m : X^m \to Y^m$$

Sao cho biểu đồ sau giao hoán

$$\begin{tikzcd}
X^{m-1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f_{m-1}"'] & X^m \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f_m"'] \arrow[dr] & X^{m+1} \arrow[d, "f_{m+1}"] \\
Y^{m-1} \arrow[r, "\delta"] & Y^m \arrow[r, "\delta"] & Y^{m+1}
\end{tikzcd}$$

Xét biểu đồ

$$\begin{tikzcd}
X^{n-1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & X^n \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f_n"'] \arrow[dr] & X^{n+1} \arrow[d, "f_{n+1}"] \\
Y^{n-1} \arrow[r, "\delta"] & Y^n \arrow[r, "\delta"] & Y^{n+1}
\end{tikzcd}$$

Từ Y^{n+1} là mô đun nội xạ các dòng là khớp. Áp dụng bài tập 3.7, tồn tại đồng cấu f_{n+1} từ X^{n+1} vào Y^{n+1} sao cho hình vuông bên phải giao hoán. Như thế ta đã hoàn thành việc thiết lập một biến đổi dây chuyền $f : X \to Y$ và mệnh đề được chứng minh.

Mệnh đề 2. Cho X và Y là hai phép giải nội xạ của các mô đun A và B, $f = \{f_n, h\}$ và $g = \{g_n, h\}$ là các biến đổi dây chuyền từ X vào Y. Khi đó f đồng luân dây chuyền với g.

Chứng minh . Ta phải xây dựng đồng cấu

$$k^n : X^n \to Y^n$$

sao cho $k^{n+1}\delta + \sigma k^n = f_n - g_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Đặt $k^0 = 0 : X^0 \to B$. Giả sử với $n \geq 0$ ta đã dựng được các đồng cấu

$$k^m : X^m \to Y^m \qquad 0 \leq m \leq n$$

sao cho $k^{m+1}\delta + \sigma k^m = f_m - g_m$

xét biểu đồ

$$\begin{tikzcd} X^{n-1} \arrow[r, "\delta"] & X^n \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "t_n"'] & X^{n+1} \arrow[dl, "k^{n+1}"] \\ & Y^n & \end{tikzcd}$$

Trong đó $t_n := f_n - g_n - \sigma k^n$

Khi đó ta có

$$t_n\delta = f_n\delta - g_n\delta - \delta k^n\delta$$

$$= \sigma f_{n-1} - \sigma g_{n-1} - \sigma(\sigma k^{n-1} + f_{n-1} - g_{n-1})$$

$$= -\sigma\sigma\delta k^{n-1}$$

$$= 0$$

Từ X^n là mô đun nội xạ và dòng là khớp. Áp dụng bài tập 2.6 tồn tại đồng cấu

$$k^{n+1} : X^{n+1} \to Y^{n+1}$$

sao cho $\quad k^{n+1}\delta = t_n = f_n - g_n - \delta k^n$

hay $\quad k^{n+1}\delta + \delta k^n = f_n - g_n$

Bây giờ giả sử

$$X : 0 \to A \to X^0 \to X^1 \to X^2 \to \ldots$$

$$Y : 0 \to A \to Y^0 \to Y^1 \to Y^2 \to \ldots$$

là hai phép giải nội xạ của cùng mô đun A.

Khi đó tồn tại biến đổi dây chuyền

$$f = \{f_n : X^n \to Y^n : n \geq -1\}$$

$$g = \{g_n : Y^n \to X^n : n \geq -1\}$$

trong đó f_{-1} và g_{-1} là các tự đồng cấu đồng nhất của A. Như vậy gf đồng luân với tự đồng cấu đồng nhất của X, fg đồng luân với tự đồng cấu đồng nhất của Y điều này kết thúc chứng minh bài toán.

4.2. Giả sử A là mô đun trên vành chính R. Từ mọi mô đun đều đẳng cấu với mô đun thương của mô đun tự do. Do đó ta thu được dãy khớp ngắn

$$0 \to X_1 \xrightarrow{i} X_0 \xrightarrow{\pi} A \to 0$$

Ở đây X_0 là mô đun tự do, $X_0/X_1 \cong A$, i là phép nhúng, π là ánh xạ tự nhiên. Do X_1 là mô đun con của mô đun tự do X_0 trên vành chính nên X_1 là mô đun tự do. Như vậy dãy khớp ngắn ở trên có thể xét như là phép giải tự do của A với $X_n = 0$ với mọi n > 1.

4.3. Giả sử

$$Y : 0 \leftarrow B \xleftarrow{\partial_0} Y_0 \xleftarrow{\partial_1} Y_1 \xleftarrow{\partial_2} Y_2 \leftarrow \ldots \xleftarrow{\partial_n} Y_n \leftarrow \ldots$$

là phép giải xạ ảnh của B. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, đặt

- i_n là phép nhúng $\mathrm{Ker}\partial_n$ vào Y_n.
- $\delta_n : Y_n \to \mathrm{Im}\partial_n$ cho bởi $\delta_n(y) = \partial_n(y)$ với mọi $y \in Y_n$.
- 1 là đồng cấu đồng nhất trên A.

Qua cách đặt trên ta có

$$i_n\delta_{n+1} = \partial_{n+1}, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Bây giờ phân tích Y thành những dãy khớp ngắn sau

$$0 \leftarrow B \xleftarrow{\delta_0} Y_0 \xleftarrow{i_0} \mathrm{Ker}\partial_0 \leftarrow 0$$

$$0 \leftarrow \mathrm{Im}\partial_1 \xleftarrow{\delta_1} Y_1 \xleftarrow{i_1} \mathrm{Ker}\partial_1 \leftarrow 0$$

$$0 \leftarrow \mathrm{Im}\partial_2 \xleftarrow{\delta_2} Y_2 \xleftarrow{i_2} \mathrm{Ker}\partial_2 \leftarrow 0$$

. . . .

. . . .

$$0 \leftarrow \mathrm{Im}\partial_n \xleftarrow{\delta_n} Y_n \xleftarrow{i_n} \mathrm{Ker}_n \leftarrow 0$$

. . . .

Theo tính chất của tích xoắn, ta thu được các dãy khớp sau

$$0 \longleftarrow A \otimes B \longleftarrow A\otimes Y_0 \xleftarrow{1\otimes i_0} A \otimes \mathrm{Ker}\partial_0 \longleftarrow \mathrm{Tor}(A, B) \longleftarrow$$

$$\longleftarrow \mathrm{Tor}(A, Y_0) = 0 \longleftarrow \mathrm{Tor}(A, \mathrm{Ker}\partial_0) \longleftarrow \mathrm{Tor}_2(A, B) \longleftarrow$$

$$\longleftarrow 0 = \mathrm{Tor}_2(A, Y_1) \ldots \qquad (1)$$

$$0 \longleftarrow A \otimes \mathrm{Im}\partial_1 \xleftarrow{1\otimes \delta_1} A \otimes Y_1 \xleftarrow{1 \otimes i_1} A \otimes \mathrm{Ker}\partial_1 \longleftarrow \ldots \qquad (2)$$

Dãy (1) cho ta

$$\mathrm{Tor}(A, B) \cong \mathrm{Ker}(1 \otimes i_0) \quad \text{và} \quad \mathrm{Tor}_2(A, B) \cong \mathrm{Tor}(A, \mathrm{Ker}\partial_0)$$

Ta có

$$\mathrm{Ker}(1 \otimes \delta_1) = < \{a\otimes y_1 \in A \otimes Y_1 : y_1 \in \mathrm{Ker}\delta_1\} >$$

$$= \langle \{a\otimes y_1 \in A \otimes Y_1 : y_1 \in \operatorname{Ker} i_0\delta_1\} \rangle$$

$$= \langle \{a\otimes y_1 \in A \otimes Y_1 : y_1 \in \operatorname{Ker} \partial_1\} \rangle$$

$$= \langle \{a\otimes y_1 \in A \otimes Y_1 : y_1 \in \operatorname{im}\partial_2\} \rangle$$

$$= \operatorname{Im}(1 \otimes \partial_2).$$

suy ra

$$H(A \otimes Y) \cong \operatorname{Ker}(1 \otimes \partial_1) / \operatorname{Im}(1 \otimes \partial_2)$$

$$\cong \operatorname{Ker}[(1 \otimes i_0)(1 \otimes \delta_1)] / \operatorname{Ker}(1 \otimes \delta_1)$$

$$\cong \operatorname{Ker}(1 \otimes i_0)$$

$$\cong \operatorname{Tor}(A, B)$$

Giả sử với mọi $1 \le m \le n$, ta có

$$H_m(A \otimes Y) \cong \operatorname{Tor}_m(A, B) \text{ và } \operatorname{Tor}_{m+1}(A, B) \cong \operatorname{Tor}(A, \operatorname{Ker}\partial_{m-1})$$

Xét dãy khớp sau

$$0 \leftarrow A \otimes \operatorname{Im}\partial n \longleftarrow A\otimes Y_n \xleftarrow{1\otimes i_n} A \otimes \operatorname{Ker}\partial_n \longleftarrow \operatorname{Tor}(A, \operatorname{Im}\partial_n)$$

$$\longleftarrow \operatorname{Tor}(A, Y_n) = 0 \longleftarrow \operatorname{Tor}(A, \operatorname{Ker}\partial_n) \longleftarrow \operatorname{Tor}_2(A, \operatorname{Im}\partial_n)$$

$$\longleftarrow 0 = \operatorname{Tor}_2(A, Y_1) \ldots \qquad (3)$$

Dãy (3) cho ta

$$\mathrm{Tor}(A, \mathrm{Im}\partial_n) \cong \mathrm{Ker}(1 \otimes i_n)$$

Ta có

$$\mathrm{Ker}(1 \otimes \delta_{n+1}) = < \{a \otimes y_{n+1} \in A \otimes Y_{n+1} : y_{n+1} \in \mathrm{Ker}\delta_{n+1}\} >$$

$$= < \{a \otimes y_{n+1} \in A \otimes Y_{n+1} : y_1 \in \mathrm{Ker}\, i_n\delta_{n+1}\} >$$

$$= < \{a \otimes y_{n+1} \in A \otimes Y_{n+1} : y_{n+1} \in \mathrm{Ker}\, \partial_{n+1}\} >$$

$$= < \{a \otimes y_{n+1} \in A \otimes Y_{n+1} : y_1 \in \mathrm{im}\partial_{n+2}\} >$$

$$= \mathrm{Im}(1 \otimes \partial_{n+2}).$$

suy ra

$$H_{n+1}(A \otimes Y) \cong \mathrm{Ker}(1 \otimes \partial_{n+1}) / \mathrm{Im}(1 \otimes \partial_{n+2})$$

$$\cong \mathrm{Ker}[(1 \otimes i_n)(1 \otimes \delta_{n+1})] / \mathrm{Ker}(1 \otimes \delta_{n+1})$$

$$\cong \mathrm{Ker}(1 \otimes i_n)$$

$$\cong \mathrm{Tor}(A, \mathrm{Im}\partial_n)$$

$$\cong \mathrm{Tor}(A, \mathrm{Ker}\partial_{n-1})$$

$$\cong \mathrm{Tor}_{n+1}(A, B) \quad \text{(giả thiết quy nạp)}$$

4.4. Giả sử ta có

$$0 \to A' \xrightarrow{f} P \to A \to 0$$

là dãy khớp ngắn của các R – môđun phải

$$0 \to B' \xrightarrow{g} Q \xrightarrow{\beta} B \to 0$$

là dãy khớp ngắn R – mô đun trái trong đó P và Q là các mô đun xạ ảnh. Gọi Y là phép giải xạ ảnh tuỳ ýcủa B'

$$Y : \ldots \to Y_{n+1} \to Y_n \to \ldots \to Y_1 \xrightarrow{\mu_1} Y_0 \xrightarrow{\mu_0} B' \to 0$$

Do μ_0 là toàn cấu và g là đơn cấu nên ta có

$$\mathrm{Ker} g\mu_0 = \mathrm{Ker}\mu_0 \text{ và } \mathrm{Im} g\mu_0 = \mathrm{Im} g = \mathrm{Ker}\beta$$

Đặt

- $\mu_{-1}' = \beta$
- $\mu_0' = g\mu_0$
- $\mu_n' = \mu_{n-1}$, với mọi $n > 0$
- $Y_0' = Q$
- $Y_n' = Y_{n-1}$, với mọi $n > 0$

Ta thu được phép giải xạ ảnh của B

$$Y' : \ldots Y_{n+1}' \xrightarrow{\mu'_{n+1}} Y_n' \to \ldots \to Y_2' \xrightarrow{\mu_2'} Y_1' \xrightarrow{\mu_1'} Y_0' \xrightarrow{\mu_0'} B \to 0$$

điều này tương đương

$$Y' : \ldots Y_n \xrightarrow{\mu_n} Y_{n-1} \to \ldots \to Y_1 \xrightarrow{\mu_1} Y_0 \xrightarrow{g\mu_0} Q \xrightarrow{\beta} B \to 0$$

Ten xơ với A' ta thu được dãy nửa khớp

$$\ldots \longrightarrow A' \otimes Y_n \xrightarrow{1\otimes\mu'_{n+1}} A' \otimes Y_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A' \otimes Y_1 \xrightarrow{1\otimes\mu'_2}$$
$$\xrightarrow{1\otimes\mu_2'} A' \otimes Y_0 \xrightarrow{1\otimes\mu_1'} A' \otimes Q \xrightarrow{1\otimes\mu_0'} A' \otimes B \longrightarrow 0$$

Với n > 1 ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}(A', B) = H_n(A' \otimes Y') &\cong \mathrm{Ker}(1\otimes\mu_n') / \mathrm{Im}(1\otimes\mu'_{n+1}) \\ &\cong \mathrm{Ker}(1\otimes\mu_{n-1}) / \mathrm{Im}(1\otimes\mu_n) \\ &\cong H_{n-1}(A', Y) \end{aligned}$$

Tại n =1, do tính khớp của dãy

$$Y'_1 \to Y'_0 \to B' \to 0$$

và tích ten xơ bảo toàn tính khớp phải, nên ta thu được dãy khớp

$$A'\otimes Y'_1 \xrightarrow{1\otimes\mu'_1} A' \otimes Y'_0 \xrightarrow{1\otimes\mu'_0} A' \otimes B \longrightarrow 0$$

Vì vậy

$$\begin{aligned} H(A' \otimes Y') &\cong \mathrm{Ker}(1\otimes\mu_1') / \mathrm{Im}(1\otimes\mu_2') \\ &\cong \mathrm{Ker}(1\otimes g\mu_0) / \mathrm{Im}(1\otimes\mu_1) \\ &\cong \mathrm{Ker}(1\otimes g\mu_0) / \mathrm{Ker}(1\otimes\mu_0) \\ &\cong \mathrm{Ker}(1\otimes g) \end{aligned}$$

Tương tự chọn X là phép giải xạ ảnh của:

$$A': X_{n+1} \to X_n \to \ldots \to X_1 \to X_0 \to 0$$

khi nối với dãy khớp :

$$0 \to A' \xrightarrow{f} P \to A \to 0$$

ta thu được phép giải xạ ảnh X' của A, và ten xơ với B ta được:

$$X' \otimes B: \ldots \to X_{n+1} \otimes B \to \ldots \to X_1 \otimes B \to$$
$$\to X_0 \otimes B \to P \otimes B \to A \otimes B \to 0$$

Với n > 1 ta có: $Tor_n(A, B) = H_{n-1}(X \otimes B) = Tor_{n-1}(A', B)$. còn khi n = 1 : $H(X' \otimes B) = Ker(f \otimes 1)$. Bây giờ với n > 2 , ta có

$$Tor_n(A, B) \cong Tor_{n-1}(A', B)$$
$$\cong H_{n-1}(A' \otimes Y') \quad \text{(bài tập 4.3)}$$
$$\cong H_{n-2}(A' \otimes Y)$$
$$\cong Tor_{n-2}(A', B') \quad \text{(bài tập 4.3)}$$

tại n = 2, ta có

$$Tor_2(A, B) \cong Tor(A', B)$$
$$\cong H(A' \otimes Y')$$
$$\cong Ker(1 \otimes g) \qquad (1)$$

Mặt khác từ

$$0 \to A' \to P \to A \to 0$$

là dãy khớp ngắn và Q là mô đun xạ ảnh, do đó ta thu được dãy khớp ngắn sau

$$0 \longrightarrow A' \otimes Q \xrightarrow{f\otimes 1} P \otimes Q \longrightarrow A \otimes Q \longrightarrow 0$$

đặc biệt ta có f⊗1 là đơn cấu. Xét dãy đồng cấu sau

$$A' \otimes B' \xrightarrow{1\otimes g} A' \otimes Q \xrightarrow{f\otimes 1} P \otimes Q$$

Ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f\otimes g) &\cong \mathrm{Ker}[(f\otimes 1)(1\otimes g)] \\ &\cong (1\otimes g)^{-1}[\mathrm{Ker}(f\otimes 1)] \\ &\cong (1\otimes g)^{-1}(0) \\ &\cong \mathrm{Ker}(1\otimes g) \qquad\qquad (2) \end{aligned}$$

Với (1) và (2), ta có

$$\mathrm{Tor}_2(A, B) \cong \mathrm{Ker}(1\otimes g) \cong \mathrm{Ker}(f\otimes g)$$

4.5. (a ⇒ b) Giả sử ta có Tor(A, B) = 0 với mọi mô đun trái B trên R. Cho C là R – mô đun trái bất kỳ. Từ mọi mô đun đều đẳng cấu với mô đun thương của một mô đun tự do nào đó . Do đó ta thu được dãy khớp ngắn

$$0 \to M \xrightarrow{i_1} F \xrightarrow{\pi_1} C \to 0$$

Trong đó F là mô đun tự do. Theo tính chất của tích xoắn, từ dãy khớp trên ta thu được dãy khớp sau

$$\mathrm{Tor}_2(A, F) \to \mathrm{Tor}_2(A, C) \to \mathrm{Tor}(A, M)$$

Bởi giả thiết ta có $\mathrm{Tor}(A, M) = 0$ và từ F là mô đun xạ ảnh nên $\mathrm{Tor}_2(A, F) = 0$. Do đó ta nhận được $\mathrm{Tor}_2(A, C) = 0$.

Giả sử $\mathrm{Tor}_m(A, C) = 0$ với mọi $1 \leq m \leq n$. Khi đó với dãy khớp

$$0 = \mathrm{Tor}_{n+1}(A, F) \to \mathrm{Tor}_{n+1}(A, C) \to \mathrm{Tor}_n(A, M) = 0$$

ta nhận được $\mathrm{Tor}_{n+1}(A, C) = 0$. Vậy theo nguyên lý qui nạp $\mathrm{Tor}_n(A, c) = 0$ với mọi $n > 0$.

($b \Rightarrow c$) Giả sử $f : X \to Y$ là đơn cấu của các mô đun trái trên R. Ta có dãy khớp ngắn

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Y/\mathrm{Imf} \to 0$$

ở đây g là phép chiếu tự nhiên. Theo tính chất tích xoắn ta thu được dãy khớp

$$0 = \mathrm{Tor}(A, Y/\mathrm{Imf}) \longrightarrow A \otimes X \xrightarrow{i\otimes f} A \otimes Y$$

điều này chứng tỏ $i\otimes f$ là đơn cấu.

($c \Rightarrow d$) Giả sử với mọi đơn cấu f các R – mô đun trái trên R ta có $i\otimes f$ cũng là đơn cấu. Cho dãy khớp ngắn

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$$

Từ tích ten xơ chuyển mỗi dãy khớp ngắn thành dãy khớp phải. Do đó ta thu đươc dãy khớp

$$A \otimes X \xrightarrow{i\otimes f} A \otimes Y \xrightarrow{i\otimes g} A \otimes Z \longrightarrow 0 \quad (*)$$

theo giả thiết thì i⊗f là đơn cấu, do đó ta nhận được

$$0 \longrightarrow A \otimes X \xrightarrow{i\otimes f} A \otimes Y \xrightarrow{i\otimes g} A \otimes Z \longrightarrow 0$$

là dãy khớp ngắn (đpcm).

(d ⇒ a) Giả sử A là R – mô đun phải và B là R – mô đun trái. Nhúng B vào dãy khớp ngắn

$$0 \to M \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} B \to 0$$

ở đây F là mô đun tự do và $F/M \cong B$. Theo giả thiết dãy

$$0 \longrightarrow A \otimes M \xrightarrow{i\otimes f} A \otimes F \xrightarrow{i\otimes g} A \otimes B \longrightarrow 0$$

cũng là dãy khớp. Theo tính chất tích xoắn dãy

$$0 = \mathrm{Tor}(A, F) \longrightarrow \mathrm{Tor}(A, B) \xrightarrow{\partial_*} A \otimes M \xrightarrow{i\otimes f} A \otimes F$$

là khớp. Mặt khác $\mathrm{Ker}(i\otimes f) = \mathrm{Im}\partial_* = 0$, suy ra $\mathrm{Tor}(A, B) = 0$.

(a ⇒ e) Giả sử ta có $\mathrm{Tor}(A, B) = 0$ với mọi R - mô đun trái B. Cho dãy khớp

$$0 \to A' \xrightarrow{f} A'' \xrightarrow{g} A \to 0$$

Theo tính chất ten xơ ta có dãy khớp phải

$$A' \otimes B \xrightarrow{f\otimes 1} A'' \otimes B \xrightarrow{g\otimes 1} A \otimes B \longrightarrow 0$$

Từ tính chất tích xoắn ta có dãy khớp

$$0 = Tor(A, B) \longrightarrow A' \otimes B \xrightarrow{f\otimes 1} A'' \otimes B$$

đặc biệt $f\otimes 1$ là đơn cấu. Suy ra ta có dãy khớp ngắn

$$0 \longrightarrow A' \otimes B \xrightarrow{f\otimes 1} A'' \otimes B \xrightarrow{g\otimes 1} A \otimes B \longrightarrow 0$$

(e $\Rightarrow$ a) Giả sử A là R – mô đun phải và B là R – mô đun trái. Nhúng A vào dãy khớp

$$0 \to M \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} A \to 0$$

ở đây F là mô đun tự do và $F/M \cong A$. Theo giả thiết dãy

$$0 \longrightarrow M \otimes B \xrightarrow{f\otimes 1} F \otimes B \xrightarrow{g\otimes 1} A \otimes B \longrightarrow 0$$

cũng là dãy khớp. Theo tính chất tích xoắn dãy

$$0 = Tor(F, B) \longrightarrow Tor(A, B) \xrightarrow{\partial_*} M \otimes B \xrightarrow{f\otimes 1} F \otimes B$$

là khớp. Mặt khác $Ker(f\otimes 1) = Im\partial_* = 0$, suy ra $Tor(A, B) = 0$.

4.6. Từ A và B là các nhóm aben tự do nên ta có thể coi A và B như là các $\mathbb{Z}$ - mô đun. Do $\mathbb{Z}$ là vành chính theo bài tập 4.2 thì tồn tại phép giải xạ ảnh của A là

$$X : \ldots \xrightarrow{0} X_n \xrightarrow{0} \ldots \xrightarrow{0} X_1 \xrightarrow{f} X_0 \xrightarrow{g} A \rightarrow 0$$

Trong đó $X_n = 0$ với mọi $n \geq 2$.Vì vậy ta thu được dãy khớp

$$\ldots 0 \longrightarrow X_1 \otimes B \xrightarrow{f\otimes 1} X_0 \otimes B \xrightarrow{g\otimes 1} A \otimes B \longrightarrow 0$$

do đó $Tor(A, B) \cong Ker(f \otimes 1)$.

Đặt $M(A, B) := F/G$. Theo giả thiết ta có thể coi $M(A, B)$ như là nhóm aben sinh ra bởi các bộ ba $(a, b, n) \in A \times B \times \mathbb{Z}$, với $n \in \mathbb{Z}$

và $na = 0$ trong A, $nb = 0$ trong B, thoả các quan hệ sau

i) $(a + a', b, n) = (a, b, n) + (a', b, n) \quad na = na' = nb = 0$

ii) $(a, b + b', n) = (a, b, n) + (a, b', n) \quad nb = nb' = na = 0$

iii) $(a, b, mn) = (ma, b, n) \qquad nma = 0 = nb$

iv) $(a, b, mn) = (a, mb, n) \qquad nmb = 0 = na$

Với mỗi $(a, b, n) \in M(A, B)$, ta chọn cố định phần tử $x_a \in X_1$ sao cho $x_a \in f^{-1}[ng^{-1}(a)]$. Định nghĩa ánh xạ (xét giảm trên phần tử sinh)

$$\varphi : M(A, B) \longrightarrow \mathrm{Ker}(f \otimes 1)$$
$$(a, b, n) \to x_a \otimes b$$

Ta sẽ chứng minh ánh xạ φ được định nghĩa tốt. Thật vậy, ta có

$$g[ng^{-1}(a)] = ngg^{-1}(a) = na = 0$$

suy ra $ng^{-1}(a) \in \mathrm{Ker}g = \mathrm{Im}f$. Do đó $f^{-1}[ng^{-1}(a)]$ xác định. Mặt khác lấy $x' \in g^{-1}(a)$ ta có

$$(f \otimes 1)(x_a \otimes b) = nx' \otimes b = x' \otimes nb = x' \otimes 0 = 0$$

Vậy $x_a \otimes b \in \mathrm{Ker}(f \otimes 1)$.

Cuối cùng, do f là đơn cấu nên để chứng minh ánh xạ φ được xác định ta chỉ cần chứng minh phần tử $x_a \otimes b$ không phụ thuộc vào sự chọn lựa phần tử trong $g^{-1}(a)$.

Giả sử ta có $y, y' \in g^{-1}(a)$, khi đó $(y - y') \in \mathrm{Ker}g = \mathrm{Im}f$ vậy tồn tại $x \in X_1$ sao cho $y = y' + f(x)$ suy ra

$$\begin{aligned}
f^{-1}(ny) \otimes b &= f^{-1}[n(y' + f(x)] \otimes b] \\
&= [f^{-1}(ny') \otimes b] + (nx \otimes b) \\
&= [f^{-1}(ny') \otimes b] + (x \otimes nb) \\
&= [f^{-1}(ny') \otimes b] + (x \otimes 0) \\
&= f^{-1}(ny') \otimes b
\end{aligned}$$

Từ các quan hệ (i), (ii), (iii), (iv) , đơn thuần tính toán ta suy ra được φ là đồng cấu.

Lấy phần tử $x \otimes b \in \mathrm{Ker}(f \otimes 1)$, khi đó

$$f(x) \otimes b = 0.$$

Từ X_0 là mô đun tự do trên vành chính nên $f(X_1)$ cũng là mô đun tự do trên vành chính, vì vậy với mọi $x \in X_1^*$, $f(x)$ là phần tử không xoắn. Suy ra nếu $b \neq 0$ mà phần tử $f(x) \otimes b = 0$, ta phải có một $m \in$ sao cho $f(x) = mx_0$ và $mb = 0$ với một $x_0 \in X_0$ nào đó.

Từ nhận xét trên với quy ước ghi chép như thế. Ta định nghĩa ánh xạ

$$\psi : \mathrm{Ker}(f \otimes 1) \to M(A, B)$$

$$\psi(x \otimes b) = (g(x_0), b, m) \qquad \text{nếu } b \neq 0,\ x \neq 0$$

$$\psi(x \otimes b) = 0 \qquad \text{nếu } x = 0 \text{ hoặc } b = 0$$

Ta sẽ chứng minh ψ được định nghĩa tốt.

Thật vậy nếu $b \neq 0$ theo định nghĩa ta có

$$mb = 0,\ mg(x_0) = g(mx_0) = gf(x) = 0$$

suy ra $(g(x_0), b, m) \in M(A, B)$. Giả sử $b \neq 0$ và $f(x) = mx_0 = m'x_0'$ trong đó $m \neq m'$. Đặt

$$m_x = \min\{m \in \mathbb{N} : \exists\, y \in X_0,\ my = f(x) \text{ và } mb = 0\}$$

Khi đó tồn tại $r, s \in \mathbb{Z}$, sao cho

$$r\, m_x = m,\ s\, m_x = m'$$

suy ra nếu $f(x) = m_x y$ thì $rx_0 = y$ và $sx_0' = y$. Do đó

$$
\begin{aligned}
\psi(x \otimes b) &= (g(x_0), b, m) \\
&= (g(x_0), b, r\, m_x) \\
&= (g(r\, x_0), b, m_x) \\
&= (g(y), b, m_x) \\
&= (g(sx_0'), b, m_x) \\
&= (g(x_0'), b, sm_x) \\
&= (g(x_0'), b, m')
\end{aligned}
$$

Vậy ψ hoàn toàn xác định. Bây giờ ta chứng minh ψ là đồng cấu, thật vậy với b , b'là hai phần tử khác không ta có

$$\psi(x \otimes b) = (g(x_0), b, m) \text{ với } f(x) = mx_0 \text{ và } mb = 0$$

$$\psi(x \otimes b') = (g(x_0'), b', m') \text{ với } f(x) = m'x_0' \text{ và } m'b' = 0$$

đặt $t = [m, m']$. Từ $f(X_1)$ là mô đun tự do trên $\mathbb{Z}$ nên tồn tại phần tử $y \in X_0$ sao cho $f(x) = ty$, rõ ràng $tb = 0 = tb'$. Suy ra

$$\psi(x \otimes b) = (g(y), b, t)$$

$$\psi(x \otimes b') = (g(y), b', t)$$

do đó

$$
\begin{aligned}
\psi(x \otimes b) + \psi(x \otimes b') &= (g(y), b, t) + (g(y), b', t) \\
&= (g(y), b + b', t) \\
&= \psi(x \otimes (b + b'))
\end{aligned}
$$

giả sử, ta có x, x’, $b \neq 0$ khi đó

$$\psi(x \otimes b) = (g(x_0), b, m) \quad mx_0 = f(x)\ , \ \ mb = 0$$

$$\psi(x' \otimes b) = (g(x_0'), b, m') \quad m'x_0' = f(x)\ , \ \ m'b = 0$$

Gọi k là cấp của b. Khi đó tồn tại $r, r' \in \mathbb{Z}$, sao cho

$$m = r\,k \quad \text{và} \quad m' = r'k$$

vì vậy

$$\psi(x \otimes b) = (g(x_0), b, m) = (g(rx_0), b, k)$$

$$\psi(x' \otimes b) = (g(x_0'), b, m') = (g(r'x_0'), b, k)$$

suy ra

$$\psi(x \otimes b) + \psi(x' \otimes b) \ = \ (g(rx_0), b, k) \ + (g(r'x_0'), b, k)$$

$$= \ (g(rx_0 + r'x_0'), b, k)$$

Từ

$$f(x) = mx_0 = rkx_0 \ \text{ và } \ f(x') \ = \ m'x_0' \ = \ r'kx_0'$$

ta nhận được $f(x + x') \ = \ k(rx_0 + r'kx_0')$. Vì vậy

$$\psi(x \otimes b) + \psi(x' \otimes b) = \ (g(rx_0 + r'x_0'), b, k) = \ \psi(x + x' \otimes b)$$

Các trường hợp x = 0, x’ = 0, b = 0, b’ = 0 đều dễ dàng kiểm được. Vì ψ bảo toàn các hệ thức của các phần tử sinh trong tích ten xơ nên ψ được mở rộng thành đồng cấu trên toàn thể tích ten xơ.

Với $(a, b, n) \in M(A, B)$, lấy $x_0 \in g^{-1}(a)$ đặt $x_a = f^{-1}(nx_0)$ theo định nghĩa của φ ta có $\psi\varphi(a, b, n) = \psi(x_a \otimes b)$. Rõ ràng $f(x_a) = nx_0$ và $nb = 0$ vậy từ định nghĩa của ψ ta có $\psi(x_a \otimes b) = (g(x_0), b, n) = (a, b, n)$. Suy ra $\psi\varphi$ và 1_M đồng nhất trên hệ sinh nên chúng bằng nhau.

Với $(x \otimes b) \in \mathrm{Ker}(f \otimes 1)$, theo định nghĩa của ψ thì

$$\psi(x \otimes b) = (g(x_0), b, n)$$

trong đó $nx_0 = f(x)$ và $nb = 0$. Rõ ràng $x \in f^{-1}\{ng^{-1}[g(x_0)]\}$ do đó

$$\varphi\psi(x \otimes b) = \varphi(g(x_0), b, n) = (x \otimes b)$$

Như vậy $\varphi\psi$ và $1_{\mathrm{Ker}(f\otimes 1)}$ đồng nhất trên hệ sinh vậy chúng bằng nhau. Các kết quả chứng minh trên cho ta

$$M(A, B) \cong \mathrm{Ker}(f \otimes 1) \cong \mathrm{Tor}(A, B)$$

Cuối cùng, nếu A là mô đun không xoắn từ điều kiện $na = 0$ ta có $n = 0$ hoặc $a = 0$. Do đó $M(A, B)$ chỉ chứa các phần tử sinh có dạng $(a, b, 0)$ hoặc $(0, b, n)$. Mặt khác

$$(0, b, n) = (0 - 0, b, n) = (0, b, n) - (0, b, 0) = 0$$

$$(a, b, 0) = (0.a, b, 0) = (0, b, 0) = 0$$

Như vậy M chỉ chứa phần tử sinh là phần tử 0 do đó $M = 0$. Từ kết quả $M(A, B) \cong \mathrm{Tor}(A, B)$, ta có $\mathrm{Tor}(A, B) = 0$. Trong trường hợp B là nhóm aben không xoắn, chứng minh tương tự ta cũng có $\mathrm{Tor}(A, B) = 0$.

4.7. Giả sử ta có dãy khớp ngắn

$$0 \to A' \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} A \to 0$$

Trong đó F là mô đun tự do, khi đó Imf $\cong$ A'. Mặt khác từ F là mô đun tự do trên vành chính do đó Imf là mô đun tự do, điều này chứng tỏ A' là mô đun tự do. Như vậy dãy khớp ngắn trên hoàn toàn có thể xem như là phép giải xạ ảnh của A với $X_0 = F$, $X_1 = A'$ còn với $n > 1$ thì $X_n = 0$. Ten xơ với B ta nhận được dãy nữa khớp sau

$$0 \to \ldots \to 0 \to A' \otimes B \xrightarrow{f\otimes i} F \otimes B \xrightarrow{g\otimes i} A \otimes B \to 0$$

Suy ra $Tor_n(A, B) = 0$ với mọi $n > 1$ và $Tor(A, B) = Ker(f \otimes i)$.

4.8. Giả sử ta có dãy khớp các R – mô đun trái

$$0 \to B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \to 0$$

Và A là mô đun phải trên vành chính. Theo bài tập 4.2 tồn tại phép giải xạ ảnh

$$X : \ldots \to X_n \to \ldots 0 \to X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\partial_0} A \to 0$$

trong đó $X_n = 0$ với mọi $n \geq 2$. Do đó với $n > 1$ $Tor_n (A, C) = 0$ với mọi R – mô đun trái C.

Theo tính chất của tích xoắn ta thu được dãy khớp sau

$$\ldots 0 = Tor_2(A, B'') \to Tor(A, B) \to Tor(A, B'') \to$$

$$\to A \otimes B' \to A \otimes B \to A \otimes B'' \to 0$$

4.9. Ký hiệu M(A, B) là nhóm aben đã miêu tả như trong bài giải 4.6. Xét bổ đề sau

Bổ đề

i) $M(A \oplus B, C) \cong M(A, C) \oplus M(B, C)$

ii) $M(A, B \oplus C) \cong M(A, B) \oplus M(A, C)$

iii) $M(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_d$ với $d = (m, n)$

Chứng minh.

i) Từ tính chất quan hệ (i) của M(A, B) ta có

$$M(A \oplus B, C) = M(A, C) + M(B, C)$$

Hơn nữa từ $A \cap B = 0$, nên $M(A, C) \cap M(B, C) = 0$. do đó

$$M(A \oplus B, C) = M(A, C) \oplus M(B, C)$$

ii) Chứng minh tương tự như trong (i)

iii) Ta đã biết mọi nhóm con của một nhóm cyclic là cyclic và một nhóm con cyclic cấp k đều đẳng cấu theo nghĩa $\mathbb{Z}$–mô đun với $\mathbb{Z}_k$. Đặt

$$A = \{a \in \mathbb{Z}_n : ma = 0\}$$

hiển nhiên A là nhóm con cyclic cấp $d = (m, n)$ do đó $A \cong \mathbb{Z}_d$. Xét ánh xạ

$$\varphi : A \longrightarrow M(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$$

$$a \to (1 + m\mathbb{Z}, a, m)$$

ta có : $m(1 + m\mathbb{Z}) = m + m\mathbb{Z} = 0$ và $ma = 0$, suy ra φ được định nghĩa tốt. Hơn nữa với $a, b \in A$, ta có

$$\varphi(a + b) = (1 + m\mathbb{Z}, a + b, m)$$

$$= (1 + m\mathbb{Z}, a, m) + (1 + m\mathbb{Z}, b, m)$$

$$= \varphi(a) + \varphi(b)$$

do đó φ là đồng cấu. Ta định nghĩa ánh xạ sau

$$\psi : M(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \longrightarrow A$$

$$(r + m\mathbb{Z}, s + n\mathbb{Z}, k) \to k.r.s.m^{-1} + n\mathbb{Z}$$

Từ $kr + m\mathbb{Z} = 0$ ta có $m \mid kr$ vì vậy $k.r.s.m^{-1}$ là số nguyên. Hơn nữa ta còn có $n \mid ks$, vì vậy

$$m(k.r.s.m^{-1}) + n\mathbb{Z} = krs + n\mathbb{Z} = 0$$

bây giờ nếu $r + m\mathbb{Z} = r' + m\mathbb{Z}$ và $s + n\mathbb{Z} = s' + \mathbb{Z}$ thì $r = r' + tm$ và $s = s' + ln$ với $t, l \in \mathbb{Z}$. Khi đó

$$\psi(r + m\mathbb{Z}, s + n\mathbb{Z}, k) = k.r.s.m^{-1} + n\mathbb{Z}$$

$$= k(r' + tm)(s' + ln)m^{-1} + n\mathbb{Z}$$

$$= (kr's'm^{-1} + n\mathbb{Z}) + (kts' + n\mathbb{Z}) +$$

$$+ (kr'lnm^{-1} + n\mathbb{Z}) + (ktln + n\mathbb{Z})$$

$$= kr's'm^{1} + n\mathbb{Z}$$

$$= \psi(r' + n\mathbb{Z}, s' + \mathbb{Z}, k)$$

Vậy ψ hoàn toàn xác định .

Từ các tính chất quan hệ của $M(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$ ta có ψ là đồng cấu.

Cuối cùng, ta có

$$\varphi\psi(r + n\mathbb{Z}, s + n\mathbb{Z}, k) = \varphi(krsm^{-1} + n\mathbb{Z})$$

$$= (1 + m\mathbb{Z}, krsm^{-1} + n\mathbb{Z}, m)$$

$$= (1 + n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, krs)$$

$$= (r + m\mathbb{Z}, s + n\mathbb{Z}, k)$$

$$\psi\varphi(a) = \psi(1 + m\,\mathbb{Z}, a, m) = a.$$

vậy $\quad M(\mathbb{Z}_m, \ \mathbb{Z}_n) \cong A \cong \mathbb{Z}_d$ (đpcm).

Từ giả thiết A và B là các nhóm aben hữu hạn nên A và B đẳng cấu với tổng trực tiếp của những nhóm con cyclic hữu hạn. Mặt khác mỗi nhóm con cyclic hữu han cấp m đẳng cấu với $\mathbb{Z}_m$. Do đó A và B đẳng cấu với tổng trực tiếp các $\mathbb{Z}_m$. Từ (i), (ii) trong bổ đề, định lý tổng trực tiếp của tích ten xơ, việc chứng minh bài toán tương đương với việc chứng minh

$$M(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n. \qquad (*)$$

đẳng cấu (*) là hiển nhiên từ (iii) của bổ đề và bài tập 2.14.

4.10. Giả sử ta có phép giải xạ ảnh của A là

$$X : 0 \leftarrow A \xleftarrow{\partial_o} X_0 \xleftarrow{\partial_1} X_1 \xleftarrow{\partial_2} X_2 \leftarrow \ldots \leftarrow X_n \leftarrow \ldots$$

Tác động hàm tử Hom(-, B’) lên dãy khớp trên ta có

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\partial_0,\, 1)} \mathrm{Hom}(X_0, B') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\partial_1,\, 1)}$$

$$\longrightarrow \mathrm{Hom}(X_1, B') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\partial_2,\, 1)} \mathrm{Hom}(X_2, B') \longrightarrow \ldots$$

theo định nghĩa của tích mở rộng ta có

$$\mathrm{Ext}(A, B') = \mathrm{Ker}[\mathrm{Hom}(\partial_2, 1)] \,/\, \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(\partial_1, 1)]$$

Với $h : A \to B$, do X_0 là mô đun xạ ảnh và g là toàn cấu nên tồn tại đồng cấu $\alpha_h : X_0 \to B$ sao cho $g\alpha_h = h\partial_0$. Áp dụng bài tập 1.18 tồn tại duy nhất đồng cấu $\mu_h : X_1 \to B'$ sao cho $f\mu_h = \alpha_h\partial_1$. Áp dụng bài tập 2.4 tồn tại đồng cấu $0 : X_2 \to 0$ sao cho $\mu_h\partial_2 = 0$

$$\begin{tikzcd}
0 & A \arrow[l] \arrow[d, "h"'] & X_0 \arrow[l, "\partial_o"'] \arrow[d, "\alpha_h"'] \arrow[dr, "\beta"] & X_1 \arrow[l, "\partial_1"'] \arrow[d, "\mu_h"] & X_2 \arrow[l, "\partial_2"'] \arrow[d, "0"] \\
0 & B'' \arrow[l] & B \arrow[l, "g"] & B' \arrow[l, "f"] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Vậy $\mu_h \in \mathrm{Ker}[\mathrm{Hom}(\partial_2, 1)]$ ở đây 1 là đồng cấu đồng nhất của B'
Bây giờ ta định nghĩa ánh xạ

$$\partial_E : \mathrm{Hom}(A, B'') \longrightarrow \mathrm{Ker}[\mathrm{Hom}(\partial_2, 1)]/\ \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(\partial_1, 1)]$$
$$h \to \mu_h + \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(\partial_1, 1)]$$

Trước tiên ta chứng minh ánh xạ xác định nghĩa là không phụ thuộc vào đồng cấu μ_h mà chỉ phụ thuộc tính giao hoán của biểu đồ. Thật vậy, nếu ta có μ_h' thoả điều kiện

$$g\alpha_h' = h\partial_0 \text{ và } f\mu_h' = \alpha_h'\partial_1$$

khi đó ta xác định ánh xạ

$$\beta : X_0 \to B' \text{ cho bởi } \beta(x) = f^{-1}(\alpha_h - \alpha_h')(x)$$

từ f là đơn cấu nên β hoàn toàn xác định. Hơn nữa với mọi x, x' $\in X_o$, gọi b, b' $\in$ B' thoả

$$f(b') = (\alpha_h - \alpha_h')(x'),\ f(b) = (\alpha_h - \alpha_h')(x)$$

khi đó

$$b' = f^{-1}(\alpha_h - \alpha_h')(x')$$

$$b = f^{-1}(\alpha_h - \alpha_h')(x)$$

$$f(b + b') = (\alpha_h - \alpha_h')(x + x')$$

$$b + b' = f^{-1}(\alpha_h - \alpha_h')(x + x')$$

suy ra

$$\begin{aligned}\beta(x + x') &= f^{-1}(\alpha_h - \alpha_h')(x + x')\\ &= b + b'\\ &= f^{-1}(\alpha_h - \alpha_h')(x) + f^{-1}(\alpha_h - \alpha_h')(x')\\ &= \beta(x) + \beta(x')\end{aligned}$$

vậy β là đồng cấu. Với đồng cấu β xây dựng ở trên ta có kết quả sau

$$\begin{aligned}f(\mu_h' + \beta\partial_1) &= f\mu_h' + f f^{-1}(\alpha_h - \alpha_h')\partial_1\\ &= f\mu_h' + \alpha_h\partial_1 - \alpha_h'\partial_1\\ &= f\mu_h' + f\mu_h - f\mu_h' \quad \text{(biểu đồ giao hoán)}\\ &= f\mu_h\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \mu_h' + \beta\partial_1 = \mu_h$ (từ f đơn cấu)

nhưng $\beta\partial_1 \in \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(\partial_1, 1)]$ nên

$$\mu_h' + \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(\partial_1, 1)] = \mu_h + \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(\partial_1, 1)]$$

Vậy ∂_E hoàn toàn xác định, dễ dàng thấy được ∂_E là đồng cấu. Với $h \in \mathrm{Hom}(A, B'')$, ta có

$$\begin{aligned} f^*\partial_E(h) &= f\mu_h + \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(\partial_1, 1)] \\ &= \alpha_h\partial_1 + \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(\partial_1, 1)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

suy ra $\mathrm{Im}\partial_E \subseteq \mathrm{Ker}f^*$. Để thấy được bao hàm ngược, lấy phần tử $t + \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(\partial_1, 1)] \in \mathrm{Ker}f^*$ khi đó $ft \in \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(\partial_1, 1_B)]$ tức tồn tại đồng cấu $\alpha : X_0 \to B$ sao cho $ft = \alpha\partial_1$

$$\begin{tikzcd} 0 & A \arrow[l] \arrow[d, "h"'] & X_0 \arrow[l, "\partial_o"'] \arrow[d, "\alpha"'] & X_1 \arrow[l, "\partial_1"'] \arrow[d, "t"'] & X_2 \arrow[l, "\partial_2"'] \\ 0 & B'' \arrow[l] & B \arrow[l, "g"] & B' \arrow[l, "f"] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

đồng cấu h được xác định như sau : với mọi $a \in A$ chọn cố định $x \in \partial_0^{-1}(a)$ định nghĩa $h(a) = g\alpha(x)$. Ta chứng minh h được định nghĩa tốt, thật vậy nếu $x, x' \in \partial_0^{-1}(a)$, từ dòng là khớp nên tồn tại $x_1 \in X_1$ sao cho $x = x' + \partial_1(x_1)$ khi đó

$$\begin{aligned} g\alpha(x) &= g\alpha(x' + \partial_1(x_1)) \\ &= g\alpha(x') + g\alpha\partial_1(x_1) \\ &= g\alpha(x') + gft(x_1) = g\alpha(x') \end{aligned}$$

dễ dàng thấy được h là đồng cấu và $h\partial_0 = g\alpha$, do đó biểu đồ trên giao hoán điều này chứng tỏ $\partial_E(h) = t + \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(\partial_1, 1)]$ suy ra $\mathrm{Ker} f^* \subseteq \mathrm{Im}\partial_E$.

4. 11. Giả sử

$$Y : 0 \to B \xrightarrow{\sigma_0} Y_0 \xrightarrow{\sigma_1} Y_1 \xrightarrow{\sigma_2} Y_2 \to \ldots \xrightarrow{\sigma_n} Y_n \to \ldots$$

là phép giải nội xạ của B. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, đặt

- i_n là phép nhúng $\mathrm{Im}\sigma_n$ vào Y_n
- $\sigma_n^* : Y_{n-1} \to \mathrm{Im}\sigma_n$ cho bởi $\sigma_n^*(y) = \sigma_n(y)$ với mọi $y \in Y_{n-1}$
- 1 là đồng cấu đồng nhất trên A.

Qua cách đặt trên ta có

$$i_n\sigma_n^* = \sigma_n \text{, với mọi } n \in \quad .$$

Bây giờ phân tích Y thành những dãykhớp sau

$$0 \to B \xrightarrow{\sigma_0} Y_0 \xrightarrow{\sigma_1^*} \mathrm{Im}\sigma_1 \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Im}\sigma_1 \xrightarrow{i_1} Y_1 \xrightarrow{\sigma_2^*} \mathrm{Im}\sigma_2 \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Im}\sigma_2 \xrightarrow{i_2} Y_2 \xrightarrow{\sigma_3^*} \mathrm{Im}\sigma_3 \to 0$$

. . . .

. . . .

$$0 \to \mathrm{Im}\partial_n \xrightarrow{i_n} Y_n \xrightarrow{\sigma_{n+1}^*} \mathrm{Im}\sigma_{n+1} \to 0$$

. . . .

Theo tính chất của tích mở rộng , ta thu được các dãy khớp sau

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, Y_0) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Ker}\partial_0)$$
$$\xrightarrow{\partial_E} \mathrm{Ext}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}(A, Y_0) = 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(A, \mathrm{Im}\sigma_1)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^2(A, B) \longrightarrow 0 = \mathrm{Ext}^2(A, Y_0) \ldots \qquad (1)$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Im}\sigma_1) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1,\, i_1)} \mathrm{Hom}(A, Y_1) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1,\, \sigma_1^*)} \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Im}\sigma_2) \qquad (2)$$

Dãy (1) cho $\mathrm{Ext}(A, B) \cong \mathrm{Im}\partial_E$ và $\mathrm{Ext}^2(A, B) \cong \mathrm{Ext}(A, \mathrm{Im}\sigma_1)$

tác động hàm tử Hom(A, -) lên Y ta có dãy nữa khớp sau

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1,\, \sigma_0)} \mathrm{Hom}(A, Y_0) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1,\, \sigma_1)} \mathrm{Hom}(A, Y_1)$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Hom}(1,\, \sigma_2)} \mathrm{Hom}(A, Y_2) \longrightarrow \ldots$$

theo định nghĩa $H^1(A, Y) = \mathrm{Ker}[\mathrm{Hom}(1, \sigma_2)]/ \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(1, \sigma_1)]$
mặt khác với $\beta : A \to Y_1$ ta có

$$\sigma_2\beta = 0 \Leftrightarrow i_2\sigma_2^*\beta = 0 \Leftrightarrow \sigma_2^*\beta = 0$$

điều này chứng tỏ $\mathrm{Ker}[\mathrm{Hom}(1, \sigma_2)] = \mathrm{Ker}[\mathrm{Hom}(1, \sigma_2^*)]$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\beta"] & Y_1 \arrow[r, "\sigma_2^*"] \arrow[dr, "\sigma_2"'] & \mathrm{Im}\sigma_2 \arrow[d, "i_2"'] \\ & & Y_2 \end{tikzcd}$$

từ dãy khớp

$$0 \to \mathrm{Im}\sigma_1 \xrightarrow{i_1} Y_1 \xrightarrow{\sigma_2^*} \mathrm{Im}\sigma_2 \to 0$$

ta thu được dãy khớp sau

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Im}\sigma_1) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1,\, i_1)} \mathrm{Hom}(A, Y_1) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1,\, \sigma_2^*)} \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Im}\sigma_2)$$

do đó

$$\mathrm{Ker}[\mathrm{Hom}(1, \sigma_2)] = \mathrm{Ker}[\mathrm{Hom}(1, \sigma_2^*)] = \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(1, i_1)]$$

Suy ra $H^1(A, Y) \cong \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(1, i_1)] / \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(1, \sigma_1)]$
Với ký hiệu tương tự như trong bài tập 4.10 ta định nghĩa ánh xạ sau $\varphi : \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(1, i_1)] \longrightarrow \mathrm{Im}\partial_E$

$$i_1 h \to \partial_E(h)$$

$$\begin{tikzcd}
0 & A \arrow[l] \arrow[d, "h"'] & X_0 \arrow[l, "\partial_o"'] \arrow[d, "\alpha_h"'] & X_1 \arrow[l, "\partial_1"'] \arrow[d, "\mu_h"'] & X_2 \arrow[l, "\partial_2"'] \\
0 & \mathrm{Im}\sigma_1 \arrow[l] & Y_0 \arrow[l, "\sigma_1^*"] & B \arrow[l, "\sigma_0"] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Do σ_0 là đơn cấu nên φ xác định, hiển nhiên φ là toàn cấu ta sẽ chứng minh φ là đẳng cấu. Để ý nếu μ_h và α_h đã xác định thì đồng cấu h là duy nhất để biểu đồ giao hoán, thật vậy nếu ta có h’ ở trong biểu đồ thoả $h'\partial_0 = \sigma_1^*\alpha_{h,}$, khi đó $h'\alpha_h = h\alpha_\partial$ do ∂_0 là toàn cấu nên h = h’.

Bây giờ ta chứng minh $Ker\varphi = Im[Hom(1, \sigma_1)]$. Lấy $i_1h \in Ker\varphi$ khi đó $\mu_h \in Im[Hom(\partial_1, 1)]$ vậy tồn tại $\beta : X_0 \to B$ sao cho $\mu_h = \beta\partial_1$ (xem biểu đồ ở dưới)

Ta xác định đồng cấu $\gamma : A \to Y_0$ như sau : với mỗi $a \in A$ chọn cố định phần tử $x \in \partial_0^{-1}(a)$, $\gamma(a) := (\alpha_h - \sigma_0\beta)(x)$. Đồng cấu γ định nghĩa ở trên hoàn toàn xác định, thật vậy nếu $x, x' \in Ker\partial_0^{-1}$ thì tồn tại $x_1 \in X_1$ sao cho $x = x' + \partial_1(x_1)$ suy ra

$$(\alpha_h - \sigma_0\beta)(x) = (\alpha_h - \sigma_0\beta)(x' + \partial_1(x_1))$$
$$= (\alpha_h - \sigma_0\beta)(x') + \alpha_h\partial_1(x_1) - \sigma_0\beta\partial_1(x_1)$$
$$= (\alpha_h - \sigma_0\beta)(x') + \alpha_h\partial_1(x_1) - \sigma_0\mu_h(x_1) = (\alpha_h - \sigma_0\beta)(x')$$
$$\Rightarrow \quad \sigma_1{}^*\gamma\partial_0 = \sigma_1{}^*(\alpha_h - \sigma_0\beta)$$
$$= \sigma_1{}^*\alpha_h - \sigma_1{}^*\sigma_0\beta$$
$$= \sigma_1{}^*\alpha_h.$$

$$\begin{tikzcd}
0 & A \arrow[l] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "\gamma"] & X_0 \arrow[l, "\partial_o"'] \arrow[d, "\alpha_h"] \arrow[dr, "\beta"] & X_1 \arrow[l, "\partial_1"'] \arrow[d, "\mu_h"] & X_2 \arrow[l, "\partial_2"'] \\
0 & Im\sigma_1 \arrow[l] \arrow[d, "i_1"'] & Y_0 \arrow[l, "\sigma_1{}^*"'] \arrow[dl, "\sigma_1"] & B \arrow[l, "\sigma_0"'] & 0 \arrow[l] \\
 & Y_1 & & &
\end{tikzcd}$$

Từ tính duy nhất của h để biểu đồ giao hoán, ta có $h = \sigma_1{}^*\gamma$ suy ra $i_1h = \sigma_1\gamma$ điều này chứng tỏ $i_1h \in Im[Hom(1, \sigma_1)]$ do đó $Ker\varphi \subseteq Im[Hom(1, \sigma_1)]$. Bây giờ với đồng cấu $\gamma : A \to Y_0$ ta có $\sigma_1\gamma = i_1\sigma_1{}^*\gamma$ đặt $h := \sigma_1{}^*\gamma$, ta xác định đồng cấu $\beta : X_0 \to B$ như sau $\beta := \sigma_0^{-1}(\alpha_h - \gamma\partial_0)$ do σ_0 là đơn cấu nên β hoàn toàn xác định. Hơn nữa $\sigma_0\beta\partial_1 = (\alpha_h - \gamma\partial_0)\partial_1 = \alpha_h\partial_1 - \gamma\partial_0\partial_1 = \alpha_h\mu_h = \sigma_0\mu_h$ bởi σ_0 là đơn cấu nên $\beta\partial_1 = \mu_h$ suy ra $\mu_h \in \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(\partial_1, 1)]$ điều này chứng tỏ $\sigma_1\gamma \in \mathrm{Ker}\varphi$. Vậy $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(1, \sigma_1)]$ do đó ta có đẳng cấu

$$H^1(A, Y) = \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(1, i_1)]/\mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(1, \sigma_1)] \cong \mathrm{Im}\partial_E \cong \mathrm{Ext}(A, B)$$

Giả sử với mọi $1 \leq m \leq n$, ta có

$$H^m(A, Y) \cong \mathrm{Ext}^m(A, B) \text{ và } \mathrm{Ext}^{m+1}(A, B) \cong \mathrm{Ext}(A, \mathrm{Im}\sigma_m)$$

Xét các dãy khớp sau

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Im}\sigma_n) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, Y_n) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Im}\sigma_{n+1})$$
$$\xrightarrow{\partial_E^{n+1}} \mathrm{Ext}(A, \mathrm{Im}\sigma_n) \longrightarrow \mathrm{Ext}(A, Y_n) = 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(A, \mathrm{Im}\sigma_{n+1})$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^2(A, \mathrm{Im}\sigma_n) \longrightarrow 0 = \mathrm{Ext}^2(A, Y_n) \ldots \qquad (1)$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Im}\sigma_n) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1,\, i_{n+1})} \mathrm{Hom}(A, Y_1) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1,\, \sigma_{n+2}^*)} \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Im}\sigma_2) \qquad (2)$$

Tương tự như trong chứng minh với n =1, ta có

$$\begin{aligned} H^{n+1}(A, Y) &\cong \mathrm{Ker}[\mathrm{Hom}(1, \sigma_{n+2})]/ \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(1, \sigma_{n+1})] \\ &\cong \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(1, i_{n+1})]/ \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(1, \sigma_{n+1})] \\ &\cong \mathrm{Im}[\partial_E^{n+1}] \\ &\cong \mathrm{Ext}(A, \mathrm{Im}\sigma_n) \\ &\cong \mathrm{Ext}^{n+1}(A, B) \end{aligned}$$

Và

$$\mathrm{Ext}(A, \mathrm{Im}\sigma_{n+1}) \cong \mathrm{Ext}^2(A, \mathrm{Im}\sigma_n) \cong \mathrm{Ext}^{n+2}(A, B)$$

Theo quy nạp bài toán được chứng minh.

4.12. Giả sử ta có dãy khớp ngắn

$$0 \to B \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} B' \to 0$$

trong đó J là mô đun nội xạ. Gọi

$$Y' : 0 \to B' \xrightarrow{\delta^0} Y_0' \xrightarrow{\delta^1} Y_1' \to \ldots \to Y_n' \to \ldots$$

là một phép giải nội xạ của B'. Đặt

$$\sigma^0 = f \,,\ \sigma^1 = \delta^0 g \,,\ \sigma^n = \delta^{n-1} \text{ với mọi } n > 1$$

$$Y_1 = J \,,\ Y_n = Y_{n-1}'$$

ta thu được phép giải nội xạ của B là:

$$Y : 0 \to B \xrightarrow{\sigma^0} Y_0 \xrightarrow{\sigma^1} Y^1 \xrightarrow{\sigma^2} \ldots \to Y^n \to \ldots$$

hay

$$Y : 0 \to B \xrightarrow{f} J \xrightarrow{\delta^0 g} Y_0' \xrightarrow{\delta^1} Y_1' \to \ldots \to Y_{n-1}' \to \ldots$$

tác dụng hàm tử Hom(A, -) vào hai phép giải nội xạ của B và B' ta có

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(i,\, \delta^0)} \mathrm{Hom}(A, Y_0') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(i,\, \delta^1)} \mathrm{Hom}(A, Y_1') \longrightarrow$$

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, Y_n') \longrightarrow \ldots$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(i,\, f)} \mathrm{Hom}(A, J) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(i,\, \delta^0 g)} \mathrm{Hom}(A, Y_0') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(i,\, \delta^1)}$$

$$\longrightarrow \mathrm{Hom}(A, Y_1') \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, Y_n') \longrightarrow \ldots$$

Với n > 1, ta có :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^n(A, B) &\cong H^n(A, Y) \quad \text{(bài tập 4.10)} \\
&\cong \mathrm{Ker}[\mathrm{Hom}(i, \sigma^n)]/\ \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(i, \sigma^{n-1})] \\
&\cong \mathrm{Ker}[\mathrm{Hom}(i, \delta^{n-1})]/\ \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(i, \delta^{n-2})] \\
&\cong H^{n-1}(A, Y') \\
&\cong \mathrm{Ext}^{n-1}(A, B')
\end{aligned}$$

Tại n = 1. Do tính chất khớp trái của hàm tử Hom(A, -), nên từ dãy khớp ngắn

$$0 \to B \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} B' \to 0$$

ta có được dãy khớp sau

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(i,\, f)} \mathrm{Hom}(A, J) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(i,\, g)} \mathrm{Hom}(A, B')$$

Như vậy Ker[Hom(i, g)] = Im[Hom(i, f)].

Xét dãy đồng cấu

$$\mathrm{Hom}(A, B') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(i,\, \delta^0)} \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(1, \delta^0)] \xrightarrow{\pi}$$

$$\xrightarrow{\pi} \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(i, \delta^0) / \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(i, \delta^0 g)]$$

Trong đó π là ánh xạ tự nhiên. Đặt

$$\varphi := \pi.\mathrm{Hom}(i, \delta^0)\ ;\ C := \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(i, \delta^0 g)]$$

Khi đó φ là toàn cấu với

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\varphi &= \{h \in \mathrm{Hom}(A, B') : \mathrm{Hom}(i, \delta^0)(h) + C = 0\} \\
&= \{h \in \mathrm{Hom}(A, B') : \delta^0 h \in \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(i, \delta^0 g)]\} \\
&= \{h \in \mathrm{Hom}(A, B') : \exists\, t \in \mathrm{Hom}(A, J),\ \delta^0 h = \delta^0 gt\} \\
&= \{h \in \mathrm{Hom}(A, B') : \exists\, t \in \mathrm{Hom}(A, J),\ h = gt\} \\
&= \{h \in \mathrm{Hom}(A, B') : \exists\, t \in \mathrm{Hom}(A, J),\ h = \mathrm{Hom}(i, g)(t)\} \\
&= \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(i, g)]
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(A, B')/\mathrm{Ker}\varphi &\cong \mathrm{Hom}(A, B')/\mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(i, g)] \\
&\cong \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(i, \delta^0)]/\mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(i, \delta^0 g)]
\end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}
\mathrm{Coker}[\mathrm{Hom}(i, g)] &\cong \mathrm{Hom}(A, B')/\mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(i, g)] \\
&\cong \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(i, \delta^0)]/\mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(i, \delta^0 g)]
\end{aligned}$$

$$\cong \ \mathrm{Ker}[\mathrm{Hom}(i, \delta^1)] \,/\, \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(i, \delta^0 g)]$$

$$\cong \ H^1(A, Y)$$

$$\cong \ \mathrm{Ext}(A, B)$$

4.13. Giả sử ta có các dãy khớp ngắn những R - mô đun trái

$$0 \to A' \xrightarrow{f} P \xrightarrow{\alpha} A \to 0$$

$$0 \to B \xrightarrow{\beta} J \xrightarrow{g} B' \to 0$$

trong đó P là mô đun xạ ảnh và J là mô đun nội xạ. Gọi

$$Y' : 0 \to B' \xrightarrow{\delta^0} Y_0' \xrightarrow{\delta^1} Y_1' \to \ldots \to Y_n' \to \ldots$$

là một phép giải nội xạ của B'. Đặt

$$\sigma^0 = f \,,\ \sigma^1 = \delta^0 g \,,\ \sigma^n = \delta^{n-1} \text{ với mọi } n > 1$$

$$Y_1 = J \,,\ Y_n = Y_{n-1}'$$

ta thu được phép giải nội xạ của B là:

$$Y : 0 \to B \xrightarrow{\sigma^0} Y_0 \xrightarrow{\sigma^1} Y^1 \xrightarrow{\sigma^2} \ldots \to Y^n \to \ldots$$

hay

$$Y : 0 \to B \xrightarrow{f} J \xrightarrow{\delta^0 g} Y_0' \xrightarrow{\delta^1} Y_1' \to \ldots \to Y_{n-1}' \to \ldots$$

tác dụng hàm tử Hom(A, -) vào phép giải nội xạ của B ta có

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1, f)} \mathrm{Hom}(A, J) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1, \delta^0 g)} \mathrm{Hom}(A, Y_0') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1, \delta^1)}$$

$$\longrightarrow \mathrm{Hom}(A, Y_1') \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, Y_n') \longrightarrow \ldots$$

với mọi n > 2, ta có

$$\mathrm{Ext}^n(A, B) \cong \mathrm{ExT}^{n-1}(A, B')$$

tương tự với phép giải của A' là

$$X' : 0 \leftarrow A' \xleftarrow{\partial_0} X_0' \xleftarrow{\partial_1} X_1' \leftarrow \ldots \leftarrow X_n' \leftarrow \ldots$$

Khi nối với dãy khớp :

$$0 \leftarrow A \xleftarrow{\alpha} P \xleftarrow{f} A' \leftarrow 0$$

ta được phép giải xạ ảnh của A là:

$$X: 0 \leftarrow A \xleftarrow{\alpha} P \xleftarrow{f.\delta_0} X_0' \leftarrow X_1' \leftarrow \ldots \leftarrow X_n' \leftarrow \ldots$$

Tác động hàm tử Hom(- , B') vào phép giải trên ta được phức:

$\mathrm{Hom}(X, B') : 0 \to \mathrm{Hom}(A, B') \to \mathrm{Hom}(P, B') \to \mathrm{Hom}(X_0', B') \ldots$

và với n > 1 ta có: $\mathrm{Ext}^n(A, B') = \mathrm{Ext}^{n-1}(A', B')$. Vậy với n > 2.
Kết hợp hai sự kiên lại ta có:

$$\mathrm{Ext}^n(A, B) \cong \mathrm{Ext}^{n-1}(A, B') \cong \mathrm{Ext}^{n-2}(A', B')$$

Tại n = 2, theo bài tập 4.11 ta có

$$\mathrm{Ext}^2(A, B) \cong \mathrm{Ext}(A, B')$$

$$\cong \ \text{Coker}[\text{Hom}(1,g)] \ \ (\text{bt } 4.12)$$

$$\cong \ \text{Hom}(A', B') \,/\, \text{Im}[\text{Hom}(1, g)] \qquad (1)$$

Do tính khớp trái của hàm tử Hom(- , J) nên từ dãy khớp

$$0 \to A' \xrightarrow{f} P \xrightarrow{\alpha} A \to 0$$

Ta thu được dãy đồng câú

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(A, J) \xrightarrow{\text{Hom}(\alpha,\, 1)} \text{Hom}(P, J) \xrightarrow{\text{Hom}(f,\, 1)} \text{Hom}(A', J) \xrightarrow{\text{Hom}(1,\, g)}$$

$$\longrightarrow \text{Hom}(A', B')$$

Với mọi h : P $\to$ J, từ f là đơn cấu và J là mô đun nội xạ nên tồn tại đồng cấu φ : P $\to$ J (Xem biểu đồ dưới)

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & P \arrow[dl, "\varphi"] \\ J & \end{tikzcd}$$

sao cho $\varphi f = h$ hay Hom(f, 1)(φ) = h’, chứng tỏ Hom(f, 1) là toàn cấu. Vậy ta có

$$\text{Im}[\text{Hom}(f, g)] \ = \ \text{Im}[\text{Hom}(1, g) \,.\, \text{Hom}(f, 1)]$$

$$= \ \text{Im}[\text{Hom}(1, g)]$$

Suy ra, với (1) ta nhận được

$$\text{Ext}^2(A, B) \ \cong \ \text{Hom}(A', B') / \,\text{Im}[\text{Hom}(1, g)]$$

$$\cong \quad \mathrm{Hom}(A', B') / \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(f,g)]$$

$$\cong \quad \mathrm{Coker}[\mathrm{Hom}(f, g)]$$

4.14. (a $\Rightarrow$ c) và (c $\Rightarrow$ b) là hiển nhiên. Để chứng minh (b $\Rightarrow$ a), lấy dãy khớp ngắn bất kỳ

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

theo tính chất tích mở rộng ta có dãy khớp

$$0 \to \mathrm{Hom}(A, X) \to \mathrm{Hom}(A, Y) \to \mathrm{Hom}(A, Z) \to$$

$$\to \mathrm{Ext}(A, X) = 0 \to \mathrm{Ext}(A, Y) \to \ldots$$

vậy $0 \to \mathrm{Hom}(A, X) \to \mathrm{Hom}(A, Y) \to \mathrm{Hom}(A, Z) \to 0$ là dãy khớp ngắn, do đó A là xạ ảnh.

4.15. (a $\Rightarrow$ c) và (c $\Rightarrow$ b) là hiển nhiên. Để chứng minh (b $\Rightarrow$ a), lấy dãy khớp ngắn bất kỳ

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

theo tính chất tích mở rộng ta có dãy khớp

$$0 \to \mathrm{Hom}(Z, B) \to \mathrm{Hom}(Y, B) \to \mathrm{Hom}(Z, B) \to$$

$$\to \mathrm{Ext}(Z, B) = 0 \to \mathrm{Ext}(Y, B) \to \ldots$$

vậy $0 \to \mathrm{Hom}(Z, B) \to \mathrm{Hom}(Y, B) \to \mathrm{Hom}(Z, B) \to 0$ là dãy khớp ngắn, do đó B là nội xa.

4.16. Từ A là mô đun trên vành chính nên ta có phép giải xạ ảnh

$$X : 0 \leftarrow A \leftarrow X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \ldots$$

trong đó $X_n = 0$ với mọi $n \geq 2$. Vậy ta có

$$\mathrm{Ext}^n(A, B') = \mathrm{Ext}^n(A, B) = \mathrm{Ext}^n(A, B'') = 0$$

Bây giờ với dãy khớp ngắn

$$0 \to B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \to 0$$

vơi tính chất tích mở rộng ta có được

$$0 \to \mathrm{Hom}(A, B') \to \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, B'') \to$$

$$\to \mathrm{Ext}(A, B') \to \mathrm{Ext}(A, B) \to \mathrm{Ext}(A, B'') \to 0 \ \ldots$$

là dãy khớp (đpcm).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Viết Đông, Trần Huyên. *Đại số đồng điều* . Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh , 2002.

[2] R.Keith Dennis. *Noncommutative Algebra*. Springer – Verlag ,1993.

[3] P.K.Draxl. *Skew fields* . Cambridge, December 1982.

[4] S.T.Hu . *Introduction to Homological Algebra*. Holden-day,1968.

[5] Dr.Saunders MacLane. *Homology*. Springer – Verlag , 1963.

[6] Oscar Zariski and Pierre Samuel. *Commutative Algebra.* Spriger, 1960.