

August 28, 2011

**BÀI TẬP****Câu 1.** Hãy kiểm tra suy luận sau

$$\begin{aligned} t &\rightarrow u \\ r &\rightarrow (s \vee t) \\ (\neg p \vee q) &\rightarrow r \\ \neg(s \vee u) & \end{aligned}$$

---


$$\therefore p$$
**Câu 2.**Đề năm 2005 Kiểm tra tính đúng của suy luận sau:

$$\forall x \in R(P(x) \vee Q(x))$$

$$\forall x \in R(\neg P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(x))$$

---


$$\therefore \forall x \in R(\neg R(x) \rightarrow P(x))$$

**Câu 3.**

Cho  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ . Có bao nhiêu quan hệ tương đương trên  $A$  gồm 3 lớp tương đương mà mỗi lớp có 4 phần tử.

**Câu 4.** Đề thi 2003.a) Có bao nhiêu cặp tập hợp con  $A, B$  của một tập hợp 8 phần tử sao cho  $A \cap B = \emptyset$ .b) Có bao nhiêu cặp tập hợp con  $A, B$  của một tập hợp 8 phần tử sao cho :

$$|A \cup B| \neq |A| + |B|.$$

**Câu 5.**Đề thi 2008

Ta lấy ngẫu nhiên 5 bìa từ một hộp chứa 60 tấm bìa trên đó lần lượt ghi các số 10, 11, ..., 69.

a) Có bao nhiêu trường hợp có thể xảy ra.

b) Có bao nhiêu trường hợp trong đó 5 bìa lấy ra chứa đúng “hai đôi” (mỗi đôi gồm hai bìa có chữ số cuối giống nhau. Chữ số cuối của hai đôi này là hai chữ số khác nhau và khác với chữ số cuối của bìa còn lại).

c) Có bao nhiêu trường hợp trong đó chữ số cuối của 5 bìa tạo thành một dãy tăng?

d) Có bao nhiêu trường hợp chữ số cuối của 5 bìa tạo thành một dãy tăng và có ít nhất hai bìa có chữ số đầu khác nhau.

**Câu 6.** Đề thi 2009.

Ta lấy ngẫu nhiên 5 bìa từ một hộp chứa 50 tấm bìa trên đó lần lượt ghi các số 10, 11, ..., 59.

a) Có bao nhiêu trường hợp có thể xảy ra.

b) Có bao nhiêu trường hợp trong đó có đúng hai trong năm bìa lấy ra có chữ số cuối bằng nhau.

August 28, 2011

**Câu 7.** Mỗi người sử dụng một hệ thống máy tính của một công ty X phải sử dụng một password dài từ 6 đến 8 ký tự, trong đó mỗi ký tự là một chữ cái (trong 26 chữ cái) hoặc là một chữ số (trong 10 chữ số). Mỗi password phải có ít nhất một chữ số. Hỏi có thể lập được bao nhiêu password khác nhau?

**Câu 8.** Trong suốt một tháng gồm 30 ngày, một đội bóng phải chơi ít nhất mỗi ngày một trận, nhưng trong tháng đó không được chơi nhiều hơn 45 trận. Hãy chứng minh rằng có một giai đoạn gồm một số ngày liên tiếp mà trong giai đoạn đó đội phải chơi đúng 14 trận.

**Câu 9.**

Xét 3 chuỗi ký tự trên tập mẫu tự  $\{a, b, c\}$  ( với  $a < b < c$  ) :  $s_1 = ac$ ,  $s_2 = aacb$ ,  $s_3 = aba$ .

- Hãy sắp xếp chúng theo thứ tự tăng đối với thứ tự từ điển.
- Cho biết giữa  $s_1$  và  $s_3$  có bao nhiêu chuỗi ký tự có chiều dài 6.

**Câu 10.**

- Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ quy sau

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + (18n - 6) 3^{n-1}$$

- Tìm số các chuỗi nhị phân chiều dài  $n$  chứa chuỗi con 00.

**Câu 11. (KHTN2010)**

- Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ quy:

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}.$$

- Tìm nghiệm thỏa điều kiện đầu  $a_0 = 8$ ,  $a_1 = 5$  của hệ thức đệ quy:

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 10n(-2)^n - 3(-2)^{n-1}$$

**Câu 12.** Đề thi năm 2005

Một người gửi 100 triệu đồng vào một quỹ đầu tư vào ngày đầu của một năm. Ngày cuối cùng của năm người đó được hưởng hai khoản tiền lãi. Khoản thứ nhất là 20% tổng số tiền có trong tài khoản cả năm, khoản lãi thứ hai là 45% của tổng số tiền có trong tài khoản của năm trước đó. Gọi  $P_n$  là số tiền có trong tài khoản vào cuối năm thứ  $n$ .

- Tìm công thức truy hồi cho  $P_n$
- Tìm biểu thức của  $P_n$  theo  $n$ .

**Câu 13.** Đề thi 2004

Một bãi giữ xe được chia thành  $n$  lô cạnh nhau theo hàng ngang để xếp xe đạp và xe máy. Mỗi xe đạp chiếm 1 lô còn mỗi xe máy chiếm 2 lô. Gọi  $L_n$  là số cách xếp cho đầy  $n$  lô.

- Tìm công thức đệ quy thỏa bởi  $L_n$
- Tìm biểu thức của  $L_n$  theo  $n$

**Câu 14.** Tìm hệ thức đệ quy cho  $x_n$ , trong đó  $x_n$  là số miền của mặt phẳng bị phân chia bởi  $n$  đường thẳng trong đó không có 2 đường nào song song và không có ba đường nào đồng qui. Tìm  $x_n$ .

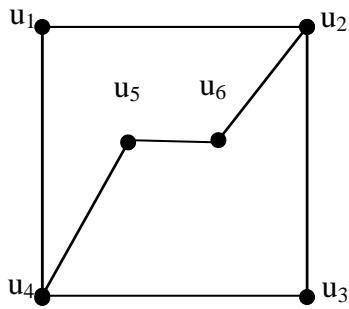
**Câu 15.** Cho hàm Bool của 4 biến

$$f(x, y, z, t) = \bar{x}t(z \vee y) \vee \bar{x}\bar{z}(y \vee \bar{t}) \vee \bar{y}(\bar{t} \vee z)$$

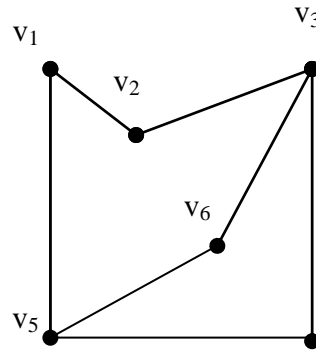
- Tìm các tế bào lớn của  $\text{Kar}(f)$ .
- Tìm tất cả các công thức đa thức tối thiểu của  $f$ .

**Câu 16.** Hai đồ thị sau đây có đẳng cấu với nhau không?

August 28, 2011



(G)



(G')

**Câu 17.**

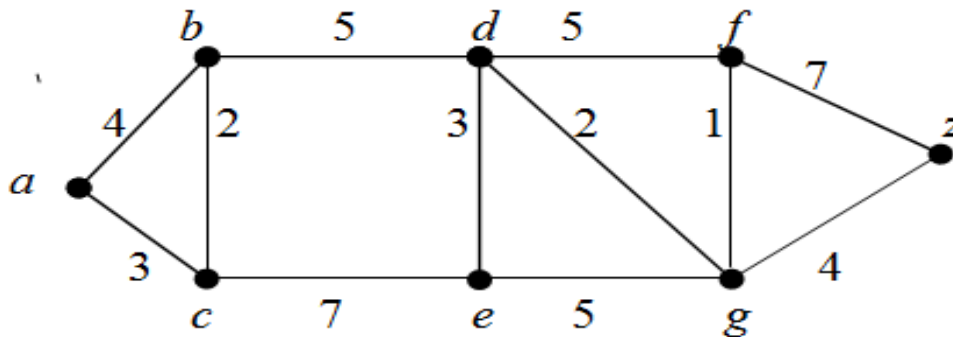
Cho đồ thị  $G = (V, E)$ ,  $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10} \}$  có ma trận khoảng cách là

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 10 & \infty & \infty & 6 & 3 & \infty \\ 1 & 0 & 4 & \infty & 10 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 1 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 5 & 0 & \infty & 2 & 8 & \infty & \infty & 5 \\ 10 & 10 & 1 & \infty & 0 & 4 & 1 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 2 & 4 & 0 & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 8 & 1 & 5 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 6 & \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & 2 & \infty \\ 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 2 & 0 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 3 & \infty & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Dùng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ  $v_1$  đến các đỉnh  $v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}$ .

**Câu 18.(KHTN2010)** Dùng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh  $a$  đến đỉnh  $z$  và chiều dài của nó trong đồ thị vô hướng có trọng lượng sau:

August 28, 2011



**Câu 19.**

Có bao nhiêu hàm Bool của 5 biến mà dạng nổi rời chính tắc của nó gồm 6 từ tối thiểu?

**Câu 20.**

Một đơn đồ thị vô hướng  $G$  gọi là tự bù nếu  $G \cong \bar{G}$ . Chứng minh rằng nếu  $G$  tự bù thì số đỉnh của  $G$  là  $4k$  hay  $4k+1$  với  $k$  nguyên dương.

**Câu 21.**

a) Vẽ cây nhị phân có được bằng cách chèn lần lượt các khóa  $K_1, K_2, \dots, K_{14}$  sao cho khóa ở mỗi nút lớn hơn khóa của các nút thuộc cây con bên trái và bé hơn khóa của các nút thuộc cây con bên phải. Thứ tự của các khóa như sau:

$$K_4 < K_5 < K_2 < K_{11} < K_9 < K_3 < K_6 < K_1 < K_{10} < K_8 < K_7 < K_{14} < K_{12} < K_{13}$$

b) Tìm số phép so sánh trước khi chèn thêm một khóa  $K$  sao cho  $K_6 < K < K_1$ .

**Câu 22.**

a) Gọi  $T$  là một cây nhị phân đủ (mỗi nút trong có đúng hai nút con) với  $N$  nút trong và có chiều cao  $h$ . Chứng minh rằng :

$$h \geq \lceil \log_2(N + 1) \rceil$$

b) Chứng minh rằng dấu “=” trong bất đẳng thức trên xảy ra nếu giả thiết thêm  $T$  là cây cân bằng (các nút lá của  $T$  đều nằm ở mức  $h - 1$  hoặc mức  $h$ ).

**Câu 23.**

a) Quan hệ  $\mathcal{R}$  trên tập hợp  $\mathbb{N}^2$  các cặp có thứ tự số tự nhiên định nghĩa bởi  $(a, b) \mathcal{R} (c, d)$  khi và chỉ khi  $a \leq c$  và  $b \leq d$  có phải là thứ tự toàn phần không?

b) Tìm một thứ tự toàn phần trên  $\mathbb{N}^2$  sao cho mọi tập con không rỗng đều có phần tử bé nhất.

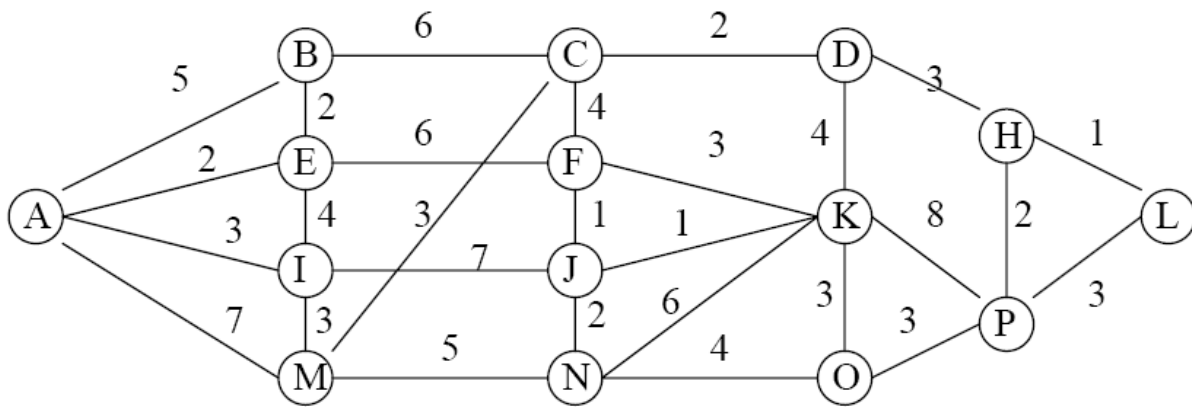
**Câu 24.**

Xét thứ tự “|” trên tập  $U$  các ước dương của 2310 trong đó  $a | b$  nếu  $a$  là ước của  $b$ . Tìm một thứ tự toàn phần  $\mathcal{R}$  trên  $U$  khác với thứ tự “ $\leq$ ” thông thường sao cho với hai phân tử bất kỳ  $a, b$  trong  $U$ , nếu  $a | b$  thì  $a \mathcal{R} b$ .

**Câu 25.**

Dùng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh A đến các đỉnh còn lại

August 28, 2011



**Câu 26.** Dùng thuật toán Prim tìm cây khung ngắn nhất của đồ thị cho bởi ma trận trọng số sau

	A	B	C	D	E	F	H	I	J
A	$\infty$	18	13	20	28	21	26	19	25
B	18	$\infty$	19	23	19	22	27	20	20
C	13	19	$\infty$	16	22	23	21	26	15
D	20	23	16	$\infty$	30	13	29	17	25
E	28	19	22	30	$\infty$	12	23	16	21
F	21	22	23	13	12	$\infty$	25	18	28
H	26	27	21	29	23	25	$\infty$	24	20
I	19	20	26	17	16	18	24	$\infty$	18
J	25	20	15	25	21	28	20	18	$\infty$

**Câu 27.** Dùng thuật toán Floyd tìm đường đi ngắn nhất giữa mỗi cặp đỉnh của đồ thị cho bởi ma trận trọng số sau

$\infty$	7	5	$\infty$
$\infty$	$\infty$	7	6
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
4	1	11	$\infty$

**Câu 28.**

- a) Một dãy số thực  $\{x_n\}$  được nói là thuộc  $O(n)$  nếu tồn tại số thực dương  $C$  và số tự nhiên  $m$  sao cho  $|x_n| < C n$  mỗi khi  $n \geq m$ . Hãy sử dụng mệnh đề lượng từ hóa để viết lại định nghĩa trên.

August 28, 2011

b) Viết ra mệnh đề lượng từ hóa cho một dãy số thực không thuộc  $O(n)$ .

**Câu 29.**

Cho  $G$  là đơn đồ thị vô hướng có  $n$  đỉnh và bậc của mỗi đỉnh không nhỏ hơn  $n/2$ . Chứng minh rằng :

a)  $G$  liên thông.

b) Nếu bỏ đi một đỉnh tùy ý của  $G$  thì đồ thị thu được vẫn còn liên thông.

**Câu 30.**

CMR nếu bỏ đi một cạnh tùy ý của đồ thị vô hướng  $G$  thì số thành phần liên thông tăng lên không quá 1.

**Câu 31.**

Cho  $G$  là đồ thị có  $n$  đỉnh và  $m$  cạnh. Chứng minh rằng  $G$  có không ít hơn  $n - m$  thành phần liên thông.

**Câu 32.**

a) Viết các biểu thức và hệ thức sau đây theo kí pháp Ba Lan và kí pháp Ba Lan đảo:

$$(a + b)^2 + c \text{ và } a + b^2 + c.$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

b) Viết các biểu thức sau đây theo kí pháp quen thuộc :

$$/ \uparrow + a b 2 - c d ;$$

$$x y + 2 \uparrow x y - 2 \uparrow - x y * / .$$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TN

**ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2011****Bài 1.**

a) Một thuật toán được nói là có thời gian đa thức nếu thời gian chạy thuật toán  $T(n)$  với  $n$  là chiều dài của input, thỏa tính chất :

"Tồn tại số thực dương  $C$  và số tự nhiên  $d$  sao cho  $T(n) < C n^d$ , với  $n$  đủ lớn".

Hãy sử dụng mệnh đề lượng từ hóa để viết lại định nghĩa trên.

b) Viết ra mệnh đề lượng từ hóa cho định nghĩa của một thuật toán với thời gian không phải là thời gian đa thức.

**Bài 2.**

Có bao nhiêu bộ ba số nguyên  $(x_1, x_2, x_3)$  sao cho  $x_1 > 10, x_2 > 15, 0 \leq x_3 < 20$  thỏa:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 100.$$

**Bài 3.**

a) Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ quy:

$$a_n = 6 a_{n-1} - 9 a_{n-2} .$$

August 28, 2011

b) Tìm nghiệm thỏa điều kiện đầu:  $a_0 = 2, a_1 = 15$  của hệ thức đệ qui:

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + n \cdot 3^{n+1}.$$

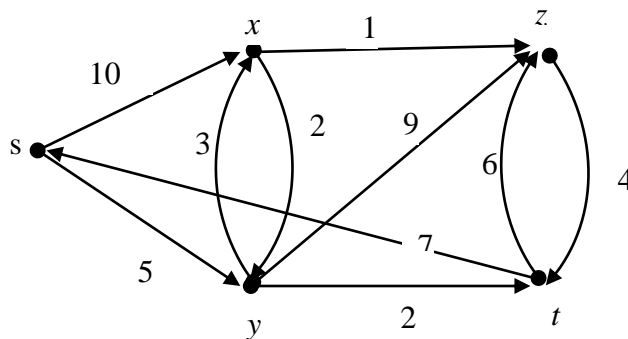
**Bài 4.** Xét hàm Bool

$$f = (\bar{x}\bar{y} \vee xy)(\bar{z} \vee t) \vee z(xt \vee \bar{y}\bar{t}) \vee y\bar{z}\bar{t}$$

- a) Hãy vẽ biểu đồ Karnauugh của  $\bar{f}$ .
- b) Viết ra dạng nổi rời chính tắc ( dạng tuyến chuẩn tắc) của  $\bar{f}$ .

**Bài 5.**

- a) Dùng thuật toán Dijkstra để tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh s đến một đỉnh bất kỳ và chiều dài của đường đi đó trong đồ thị có hướng sau



- b) Giả sử cạnh  $yx$  có trọng  $-3$ . Chạy thuật toán Dijkstra nhưng bỏ qua điều kiện trọng không âm. Ý nghĩa của kết quả nhận được là gì? Giải thích tại sao?

**Bài 6.**

- a) Vẽ cây nhị phân có thứ tự để biểu diễn biểu thức sau:  
 $((x + x^2) + x^3) + x^4$ ,  
 trong đó phép toán “lũy thừa” được biểu diễn bởi diễn ký hiệu “^” :  $a^b = a \wedge b$ .
- b) Viết ra biểu thức theo ký pháp Ba Lan của cây trong câu a).

August 28, 2011

**LỜI GIẢI TÓM TẮT, ĐÁP SỐ****Câu 1.**

$$\begin{array}{ll} t \rightarrow u & (1) \\ r \rightarrow (s \vee t) & (2) \\ (\neg p \vee q) \rightarrow r & (3) \\ \neg(s \vee u) & (4) \end{array}$$

---

 $\therefore p$ 

$$\begin{array}{ll} \neg s \wedge \neg u & (\text{Do tiền đề (4) và luật đối ngẫu}) & (5) \\ \neg u & (\text{Do (5) và luật đơn giản nối liền}) & (6) \\ \neg t & (\text{Do (1),(6) và luật phủ định}) & (7) \\ \neg s & (\text{Do (5) và luật đơn giản nối liền}) & (8) \\ \neg t \wedge \neg s & (\text{Do (7), (8) và phép toán nối liền}) & (9) \\ \neg(t \vee s) & (\text{Do (9) và luật đối ngẫu}) & (10) \\ \neg r & (\text{Do (2), (10) và luật phủ định}) & (11) \\ \neg(\neg p \vee q) & (\text{Do (3), (11) và luật phủ định}) & (12) \\ p \wedge \neg q & (\text{Do (12) và luật đối ngẫu}) & (13) \\ p & (\text{Do (13) và luật đơn giản nối liền}) & \end{array}$$

**Câu 2**

- 1)  $\forall x \in R(\neg P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(x))$  (Tiền đề)
- 2)  $\neg P(a) \wedge Q(a) \rightarrow R(a)$  (Qui tắc đặc biệt phổ dụng với a bất kỳ)
- 3)  $P(a) \vee \neg Q(a) \vee R(a)$  (Luật kéo theo)
- 4)  $Q(a) \rightarrow P(a) \vee R(a)$  (Luật kéo theo)
- 5)  $\forall x \in R(P(x) \vee Q(x))$  (Tiền đề)
- 6)  $P(a) \vee Q(a)$  (Qui tắc đặc biệt hóa phổ dụng với a bất kỳ)
- 7)  $\neg P(a) \rightarrow Q(a)$  (Luật kéo theo)
- 8)  $\neg P(a) \rightarrow P(a) \vee R(a)$  (Từ 4 và 7, Tam đoạn luận)
- 9)  $P(a) \vee P(a) \vee R(a)$  (Luật kéo theo)
- 10)  $P(a) \vee R(a)$  (Luật lũy đẳng)
- 11)  $\neg R(a) \rightarrow P(a)$  (Luật kéo theo)
- 12)  $\forall x \in R(\neg R(x) \rightarrow P(x))$  (Qui tắc tổng quát hóa phổ dụng)

**Câu 3.**

August 28, 2011

$$\frac{C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot 1}{3!} = 5775$$

**Câu 4**

a) 3281 b) 29615.

**Câu 5**

a) 5461512. b) 486000. c) 1959552. d) 1958040

**Câu 6**

a) 2118760. b) 1050000

**Câu 7.**

$$(36^6 - 26^6) + (36^7 - 26^7) + (36^8 - 26^8) = 2684483063360.$$

**Câu 8.**

Đặt  $a_j$  là số trận mà đội bóng chơi cho đến hết ngày thứ  $j$  trong tháng. Ta có  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là một dãy tăng gồm các số nguyên dương khác nhau từng đôi và  $a_j \leq 45$ . Hơn nữa,  $a_1+14, a_2+14, \dots, a_{30}+14$  cũng là một dãy số tăng gồm các số nguyên dương khác nhau với  $15 \leq a_j+14 \leq 59$ .

Ta thấy rằng 60 số nguyên dương  $a_1, a_2, \dots, a_{30}, a_1+14, a_2+14, \dots, a_{30}+14$  đều nhỏ hơn hoặc bằng 59. Áp dụng nguyên lý Dirichlet ta thấy có ít nhất hai trong 60 số nguyên dương nói trên phải bằng nhau. Như thế phải có ít nhất hai chỉ số  $i$  và  $j$  sao cho  $a_i = a_j + 14$ . Do đó đúng 14 trận được đội bóng chơi từ ngày thứ  $j+1$  đến ngày thứ  $i$ .

**Câu 9.**

a)  $s_2 < s_3 < s_1$

b)  $s_3 = aba < ab*** < s_1 = ac$

Mỗi vị trí \* có 3 cách chọn. Do đó có  $3 * 3 * 3 * 3 = 81$  chuỗi.

**Câu 10.**

a)  $a_n = (A + nB) 3^n + (n-2) n^2 3^n$

b) Tìm số các chuỗi nhị phân chiều dài  $n$  chứa chuỗi con 00.

Gọi  $a_n$  là số chuỗi nhị phân chiều dài  $n$  chứa chuỗi con 00.

Ta có  $a_0 = 0, a_1 = 0$ .

Ta tính  $a_n$ :

- TH1 : Nếu bit đầu tiên là bit 1 thì có  $a_{n-1}$  cách chọn  $n-1$  bit còn lại.

- TH2 : Nếu bit đầu tiên là bit 0 thì có hai TH xảy ra:

• Bit thứ 2 là bit 1 : có  $a_{n-2}$  cách chọn  $n-2$  bit còn lại

• Bit thứ 2 là bit 0 : có  $2^{n-2}$  cách chọn  $n-2$  bit còn lại ( các bit này chọn 0 hay 1 đều được)

$$\text{Vậy } a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2} \quad (n \geq 2) \quad (1)$$

$$\text{Hệ thức đệ quy TTTN : } a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (2)$$

August 28, 2011

PTĐT :  $x^2 - x - 1 = 0$  có 2 nghiệm đơn là

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Nghiệm tổng quát của (2) là  $a_n = A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Ta tìm một nghiệm riêng của (1) dưới dạng  $a_n = C2^n$ . Thay vào (1) :

$$C2^n = C2^{n-1} + C2^{n-2} + 2^{n-2} \Leftrightarrow 4C = 2C + C + 1 \Leftrightarrow C = 1.$$

Nghiệm TQ của (1) là  $a_n = A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2^n$ .

Sử dụng ĐK đầu :  $A + B + 1 = 0$

$$A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2 = 0.$$

$$\Rightarrow A = -\frac{5+3\sqrt{5}}{10}, B = -\frac{5-3\sqrt{5}}{10}$$

$$a_n = -\frac{5+3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2^n$$

### **Câu 11(KHTN2010)**

a)  $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$  được viết lại  $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$  (1)

Phương trình đặc trưng của (1) là  $x^2 - x - 6 = 0$  có 2 nghiệm là  $x = -2$  và  $x = 3$ .

Nên nghiệm tổng quát của (1) là  $a_n = C_1(-2)^n + C_23^n$ .

b) Đặt  $f_n = 10n(-2)^n - 3(-2)^{n-1} = (-2)^n(10n + 3/2)$ . Vì  $-2$  là 1 nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng  $n(-2)^n(A + B)$ . (3)

Thế (3) vào hệ thức ban đầu ta có:

$$n(-2)^n(A + B) = (n-1)(-2)^{n-1}(A(n-1) + B) + 6(n-2)(-2)^{n-2}(A(n-2) + B) + (-2)^n(10n + 3/2) \quad (4).$$

Thế  $n = 2$  vào (4), ta có:

$$2(-2)^2(2A + B) = (-2)(A + B) + (-2)^2(10 \cdot 2 + 3/2)$$

$$\Leftrightarrow 16A + 8B = -2A - 2B + 86 \Leftrightarrow 18A + 10B = 86 \Leftrightarrow 9A + 5B = 43 \quad (5)$$

Thế  $n = 1$  vào (4), ta có:

$$(-2)(A + B) = 6(-1)(-2)^{-1}(B - A) + (-2)(10 + 3/2)$$

$$\Leftrightarrow -2A - 2B = 3B - 3A - 23 \Leftrightarrow A - 5B = -23 \quad (6)$$

Từ (5) và (6) ta có hệ phương trình

August 28, 2011

$$\begin{aligned}9A + 5B &= 43 \\ A - 5B &= -23\end{aligned}$$

Giải hệ này ta có:  $A = 2$  và  $B = 5$

Như vậy nghiệm tổng quát của hệ thức là:

$$a_n = C_1(-2)^n + C_23^n + n(-2)^n(2n + 5) \quad (7)$$

Thế điều kiện đầu vào (7), ta có:

$$\begin{aligned}a_0 = 8 &= C_1(-2)^0 + C_23^0 + 0(-2)^0(2 \cdot 0 + 5) \\ \Leftrightarrow C_1 + C_2 &= 8 \quad (8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_1 = 5 &= C_1(-2)^1 + C_23^1 + 1(-2)^1(2 \cdot 1 + 5) \\ \Leftrightarrow -2C_1 + 3C_2 &= 19 \quad (9)\end{aligned}$$

Từ (8) và (9) ta có hệ phương trình:

$$\begin{aligned}C_1 + C_2 &= 8 \\ -2C_1 + 3C_2 &= 19\end{aligned}$$

Giải hệ phương trình trên ta có  $C_1 = 1$  và  $C_2 = 7$ .

Vậy nghiệm của hệ thức đệ qui (1) là:

$$a_n = (-2)^n + 7 \cdot 3^n + n(-2)^n(2n + 5)$$

### Câu 12.

a. Gọi  $P_n$  là tổng số tiền có trong tài khoản vào cuối năm thứ  $n$ .

Như vậy:

- Số tiền có trong tài khoản vào ngày đầu của năm thứ nhất sẽ là:

$$P_0 = 100 \text{ triệu}$$

- Số tiền có trong tài khoản vào ngày cuối năm của năm thứ nhất là:

$$P_1 = P_0 + \text{Lãi 1} + \text{Lãi 2}$$

Trong đó:

Lãi 1 = 20% tổng số tiền có trong tài khoản cả năm

$$= 0.2 * P_0$$

Lãi 2 = 45% tổng số tiền có trong tài khoản của năm trước đó

$$= 0.45 * P_0$$

Vậy :

$$P_1 = P_0 + 0.2 P_0$$

- Số tiền có trong tài khoản vào ngày cuối năm thứ hai sẽ là:

$$P_2 = P_1 + 0.2 * P_1 + 0.45 * P_0$$

Tổng số tiền có trong tài khoản vào cuối năm thứ  $n$  sẽ là:

$$P_n = P_{n-1} + 0.2 * P_{n-1} + 0.45 * P_{n-2}$$

August 28, 2011

$$= 0.45 * P_{n-2} + 1.02 * P_{n-1}$$

b. Giải hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất với  $P_0 = 100$ ,  $P_1 = 120$  ta được

$$P_n = \frac{250}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{50}{3} \left(-\frac{3}{10}\right)^n$$

**Câu 13.**

- a. Gọi  $L_n$  là số cách xếp số xe máy, xe đạp cho đầy  $n$  lô
- số cách xếp cho đầy  $n$  lô với vị trí đầu tiên là xe đạp là  $L_{n-1}$
  - số cách xếp cho đầy  $n$  lô với vị trí đầu tiên là xe máy là  $L_{n-2}$

Vậy:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

b. Giải hệ thức đệ qui với điều kiện đầu:

$L_0 = 1$ ,  $L_1 = 1$  ta được

$$L_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

**Câu 14.**

Giả sử  $n-1$  đường thẳng chia mặt phẳng thành  $x_{n-1}$  miền.

Đường thẳng thứ  $n$  cắt  $n-1$  đường thẳng cho trước tại  $n-1$  giao điểm.

Trong đó:

- có  $n-2$  đoạn thẳng hữu hạn
- có 2 đoạn có một đầu vô hạn

Mỗi đoạn thẳng này phân miền mặt phẳng nó đi qua thành 2 miền.

Do vậy sẽ tăng thêm  $n$  miền.

Vậy:

$$x_n = x_{n-1} + n$$

Giải hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất với điều kiện đầu  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$  ta được

$$x_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

**Câu 15.**

a) Các tế bào lớn:

$$\bar{y} \bar{t}, z \bar{y}, \bar{x} z t, \bar{x} y t, \bar{x} y \bar{z}, \bar{x} \bar{z} \bar{t}$$

b) ĐS : Có ba công thức đa thức tối thiểu là

$$\bar{y} \bar{t} \vee \bar{y} z \vee \bar{x} z t \vee \bar{x} y \bar{z},$$

$$\bar{y} \bar{t} \vee \bar{y} z \vee \bar{x} y t \vee \bar{x} y \bar{z},$$

$$\bar{y} \bar{t} \vee \bar{y} z \vee \bar{x} y t \vee \bar{x} \bar{z} \bar{t}$$

**Câu 16**

G đẳng cấu với  $G'$ .

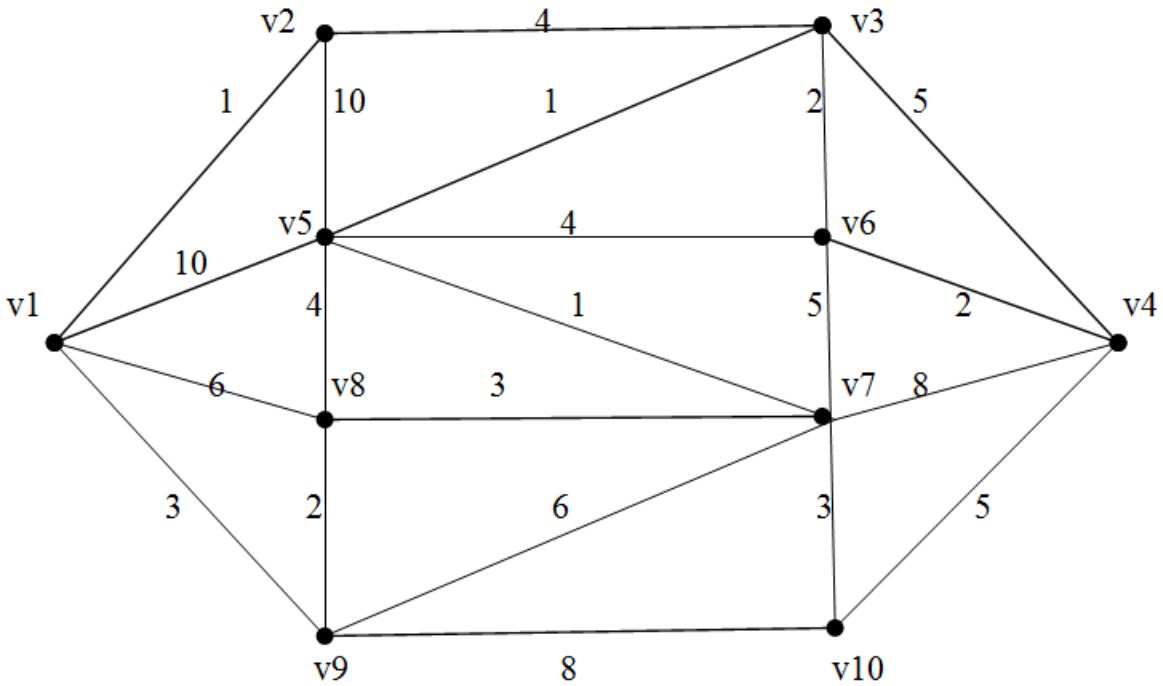
$$f(u_1) = v_6, f(u_2) = v_3, f(u_3) = v_4, f(u_4) = v_5, f(u_5) = v_1, f(u_6) = v_2$$

August 28, 2011

$$M_G = \begin{pmatrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ u_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ u_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ u_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ u_6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_{G'} = \begin{pmatrix} & v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \\ v_6 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_G = M_{G'}$

**Câu 17.**



August 28, 2011

$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$
0	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
-	$(1, v_1)^*$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(10, v_1)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(6, v_1)$	$(3, v_1)$	$(\infty, -)$
-	-	$(5, v_2)$	$(\infty, -)$	$(10, v_1)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(6, v_1)$	$(3, v_1)^*$	$(\infty, -)$
-	-	$(5, v_2)^*$	$(\infty, -)$	$(10, v_1)$	$(\infty, -)$	$(9, v_9)$	$(5, v_9)$	-	$(11, v_9)$
-	-	-	$(10, v_3)$	$(6, v_3)$	$(7, v_3)$	$(9, v_9)$	$(5, v_9)^*$	-	$(11, v_9)$
-	-	-	$(10, v_3)$	$(6, v_3)^*$	$(7, v_3)$	$(9, v_9)$	-	-	$(11, v_9)$
-	-	-	$(10, v_3)$	-	$(7, v_3)^*$	$(7, v_5)$	-	-	$(11, v_9)$
-	-	-	$(9, v_6)$	-	-	$(7, v_5)^*$	-	-	$(11, v_9)$
-	-	-	$(9, v_6)^*$	-	-	-	-	-	$(10, v_7)$
-	-	-	-	-	-	-	-	-	$(10, v_7)^*$

**Câu 18.(KHTN2010)**

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$z$
0	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
0*	$(4, a)$	$(3, a)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
-	$(4, a)$	$(3, a)^*$	$(\infty, -)$	$(10, c)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
-	$(4, a)^*$	-	$(9, b)$	$(10, c)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
-	-	-	$(9, b)^*$	$(10, c)$	$(14, d)$	$(11, d)$	$(\infty, -)$
-	-	-	-	$(10, c)$	$(14, d)$	$(11, d)$	$(\infty, -)$
-	-	-	-	-	$(12, g)$	$(11, d)^*$	$(15, g)$
-	-	-	-	-	$(12, g)^*$	-	$(15, g)$
-	-	-	-	-	-	-	$(15, g)^*$

Đường đi ngắn nhất từ  $a$  đến  $z$  là  $abdgz$  với chiều dài 15.

**Câu 19.**

Trong tập hợp các hàm Boole của 5 biến có  $2^5 = 32$  từ tối tiểu.

Số cách chọn 6 từ tối tiểu trong 32 từ tối tiểu là  $C_{32}^6 = 906102$ .

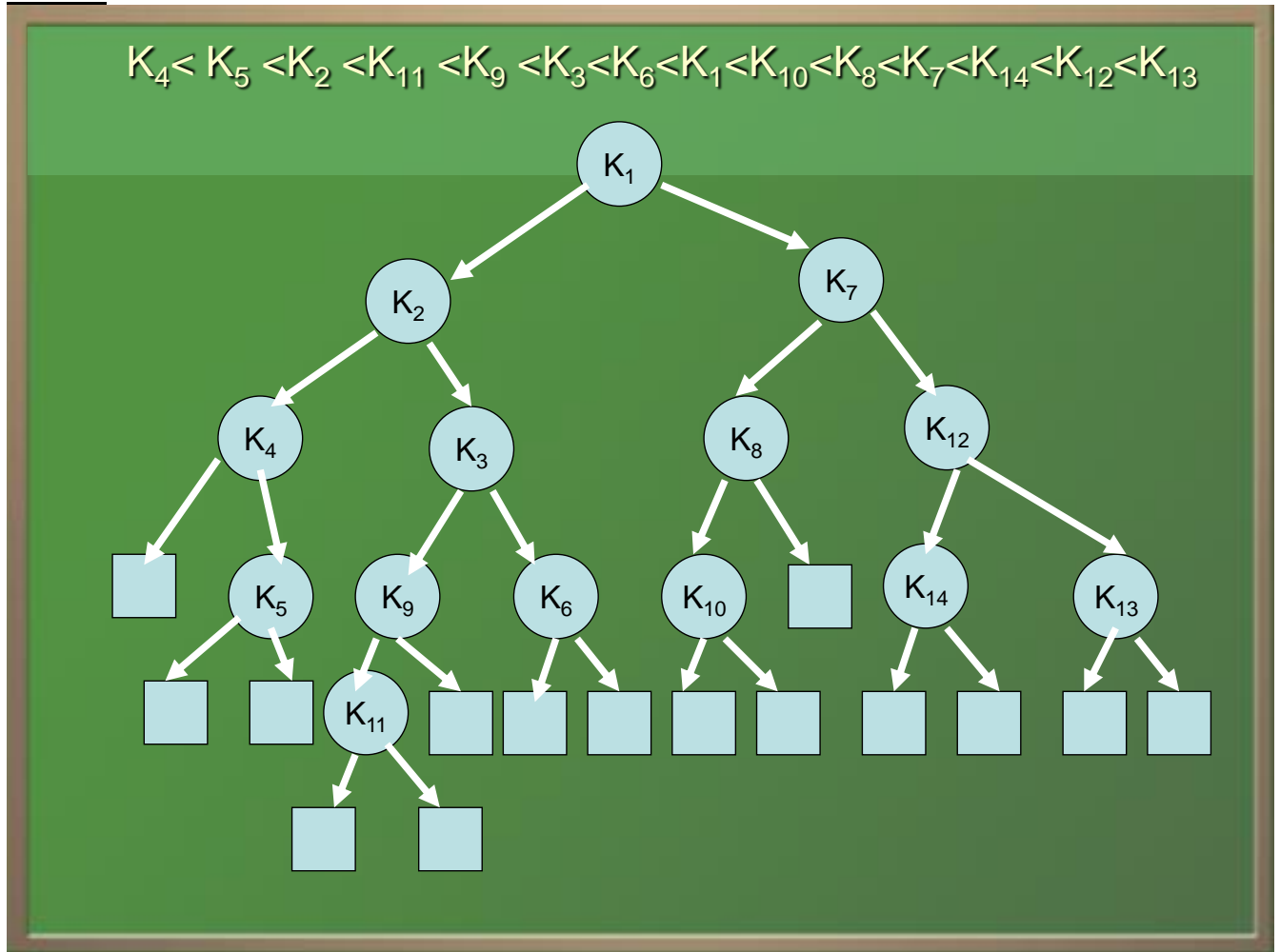
**Câu 20.**

Đồ thị đủ  $K_n$  có  $n(n - 1) / 2$  cạnh.

Do đó  $G$  có  $n(n - 1) / 4$  cạnh. Suy ra  $n$  chia hết cho 4 hoặc  $n - 1$  chia hết cho 4.

August 28, 2011

**Câu 21.**



Để chèn thêm khóa  $K$  với  $K_6 < K < K_1$  ta cần so sánh nó với  $K_1, K_2, K_3, K_6$ .  
Do đó cần 4 phép so sánh.

**Câu 22.**

**Tính chất:** Nếu  $T$  là cây nhị phân đủ gồm  $N$  nút trong thì  $T$  có  $N + 1$  nút lá.

CM. Mỗi nút trong của cây nhị phân đủ đều có bậc ra là 2, còn mỗi nút lá của nó đều có bậc ra bằng 0. Do đó tổng bậc ra của tất cả các nút là  $2N$ .

Theo định lý về bậc thì số cạnh  $m = 2N$ . (1)

Vì  $T$  là cây nên số cạnh của nó là  $m = N + l - 1$ . (Ở đây  $l$  là số nút lá). (2)

Từ (1), (2) ta có :  $2N = N + l - 1$ . Suy ra  $l = N + 1$ .

**Giải câu 22.**

a) Gọi  $T$  là một cây nhị phân đủ ( mỗi nút trong có đúng hai nút con) với  $N$  nút trong và có chiều cao  $h$ . Chứng minh rằng :

$$h \geq \lceil \log_2(N + 1) \rceil$$

August 28, 2011

Ta CM qui nạp theo chiều cao  $h$  BĐT  $l \leq 2^h$

- Rõ ràng bất đẳng thức đúng khi  $h = 1$  ( lúc này  $l = 2$ ).
- Giả sử BĐT đúng với mọi cây có chiều cao  $\leq h - 1$ . Xét  $T$  là cây có chiều cao  $h$ .

Gọi  $l_1, l_2$  là số nút lá của cây con  $T_1, T_2$  là cây con bên trái và bên phải của nút gốc. Để ý rằng  $T_1$  và  $T_2$  là các cây có chiều cao  $\leq h - 1$  nên theo giả thiết qui nạp ta có  $l = l_1 + l_2 \leq 2 \cdot 2^{h-1} = 2^h$ .

Vậy  $h \geq \log_2 l \Leftrightarrow h \geq \log_2(N + 1) \Rightarrow h \geq \lceil \log_2(N + 1) \rceil$ .

b) Do cây là cây cân bằng nên các nút ở mức  $\leq h - 2$  đều là nút trong. Vì vậy tổng số nút mức  $h - 1$  là  $2^{h-1}$ . Tổng số nút lá ở mức  $h$  bằng 2 lần số nút trong ở mức  $h - 1$  nên  $2^{h-1} < N + 1 \leq 2^h \Leftrightarrow h - 1 < \log_2(N + 1) \leq h \Rightarrow h = \lceil \log_2(N + 1) \rceil$

Giải thích :

$$N + 1 = l = l_h + l_{h-1} = 2N_{h-1} + l_{h-1} = N_{h-1} + N_{h-1} + l_{h-1} = N_{h-1} + 2^{h-1} > 2^{h-1} .$$

### Câu 23.

- a)  $\mathcal{R}$  không phải là thứ tự toàn phần vì  $(1, 2)$  và  $(2, 1)$  không so sánh được với nhau.
- b) Định nghĩa quan hệ  $\mathcal{R}'$  trên  $\mathbb{N}^2$  bởi  $(a, b) \mathcal{R}' (c, d)$  khi và chỉ khi  $a < c$  hoặc  $a = c$  và

$b \leq d$ . Rõ ràng  $\mathcal{R}'$  là thứ tự toàn phần trên  $\mathbb{N}^2$ .

Giả sử  $A$  là một tập con khác rỗng của  $\mathbb{N}^2$ . Khi ấy tập các thành phần thứ nhất của những phần tử trong  $A$  là một tập con khác rỗng của  $\mathbb{N}$  nên có phần tử bé nhất là  $m$ . Khi đó tập con các thành phần thứ hai của những cặp trong  $A$  với thành phần thứ nhất là  $m$  sẽ có phần tử bé nhất là  $n$ . Rõ ràng  $(m, n)$  là phần tử bé nhất của  $A$ .

### Câu 24.

Vì  $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$  nên mỗi ước  $\neq 1$  của 2310 là tích của các số nguyên tố thuộc một tập con của  $S = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ . Ta có thể đồng nhất ước này với dãy số nguyên  $a_1 a_2 \dots a_m$  trong đó  $2 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_m \leq 11$ , và  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subset S$ . Thứ tự  $\mathcal{R}$  được định nghĩa sao cho 1 là phần tử bé nhất. Nếu hai ước  $a \neq 1 \neq b$  được biểu diễn bởi hai dãy  $a_1 a_2 \dots a_m$  và  $b_1 b_2 \dots b_p$  ta định nghĩa  $a \mathcal{R} b$  khi và chỉ khi  $m < p$  hoặc  $m = p$  và  $a_1 a_2 \dots a_m$  trội  $b_1 b_2 \dots b_p$  theo thứ tự tự điển. Chứng minh dễ dàng  $\mathcal{R}$  là thứ tự toàn phần trên  $U$ .

### Câu 27.

$$D = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & 1 & 11 & \infty \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} \infty & 2 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 3 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 2 & 3 & \infty \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & 1 & 9 & \infty \end{bmatrix} \quad Q_1 = \begin{bmatrix} \infty & 2 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 3 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 2 & 1 & \infty \end{bmatrix}$$

August 28, 2011

$$\begin{aligned}
 D_2 &= \begin{bmatrix} \infty & 7 & 5 & 13 \\ \infty & \infty & 7 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} & Q_2 &= \begin{bmatrix} \infty & 2 & 3 & 2 \\ \infty & \infty & 3 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\
 D_3 &= \begin{bmatrix} \infty & 7 & 5 & 13 \\ \infty & \infty & 7 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} & Q_3 &= \begin{bmatrix} \infty & 2 & 3 & 2 \\ \infty & \infty & 3 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\
 D_4 &= \begin{bmatrix} 17 & 7 & 5 & 13 \\ 10 & 7 & 7 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} & Q_4 &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

**Câu 28.**

- a)  $\exists C > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq m \Rightarrow |x_n| < Cn)$ .
- b)  $\forall C > 0, \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq m \wedge |x_n| \geq Cn)$ .

**Câu 29.**

- a) Ta CM bằng phản chứng. Giả sử  $G$  không liên thông. Khi đó  $G$  có ít nhất hai thành phần liên thông, trong đó phải tồn tại thành phần liên thông  $H$  với  $< n/2$  đỉnh. Trong  $H$  bậc của mỗi đỉnh  $< \frac{n}{2} - 1$ , trái giả thiết.
- b) Theo câu a) thì  $G$  liên thông. Gọi  $G'$  là đồ thị thu được từ  $G$  bằng cách bỏ đi một đỉnh. Nếu  $G'$  không liên thông thì tồn tại một thành phần liên thông  $H$  có  $\leq \frac{n-1}{2}$  đỉnh. Trong  $H$  mỗi đỉnh  $P$  có bậc  $\leq \frac{n-1}{2} - 1$ . Khi đó trong  $G$  đỉnh  $P$  có bậc  $\leq \frac{n-1}{2}$ . Trái giả thiết.

**Câu 30.**

Rõ ràng ta chỉ cần CM cho  $G$  liên thông là đủ. Ta CM bằng phản chứng. Giả sử  $G$  liên thông và  $G - e$  có ít nhất 3 thành phần liên thông. Trả lại cạnh  $e$  cho  $G$ . Ta thấy  $e$  chỉ có thể nối nhiều lắm là 2 trong 3 thành phần liên thông của  $G - e$  với nhau, và do đó  $G$  có ít nhất hai thành phần liên thông. Trái giả thiết  $G$  liên thông.

**Câu 31.**

Ta CM qui nạp theo số cạnh  $m$  của  $G$ .  
 Với  $m = 0$  thì khẳng định hiển nhiên đúng (Mỗi đỉnh là một thành phần liên thông).  
 Giả sử kết luận bài toán đúng cho  $m = k$  cạnh. Xét  $G$  tùy ý có  $k+1$  cạnh. Bỏ một cạnh ra khỏi  $G$  ta thu được  $G'$  có  $k$  cạnh. Trong  $G'$  có ít nhất  $n - k$  thành phần liên thông. Theo Câu 17 số thành phần liên thông trong  $G'$  không vượt quá 1 so với  $G$ . Do đó số thành phần liên thông trong  $G$  không ít hơn  $n - k - 1 = n - (k + 1)$ . Vậy kết luận đúng cho  $m = k+1$ .

**Câu 32.**

- a)  $(a + b)^2 + c : + \uparrow + a b 2 c$   
 $a b + 2 \uparrow c +$

August 28, 2011

$$\begin{aligned}
 a + b^2 + c & : + + a \uparrow b \ 2 \ c \\
 & \quad \quad \quad a \ b \ 2 \ \uparrow + c + \\
 (a + b)^2 & = a^2 + b^2 + 2ab : \uparrow + a \ b \ 2 = + + \uparrow a \ 2 \ \uparrow b \ 2 * 2 * ab \\
 & \quad \quad \quad a \ b + 2 \ \uparrow = a \ 2 \ \uparrow b \ 2 \uparrow + 2 \ a \ b * * +
 \end{aligned}$$

b)  $(a + b)^2 / (c - d)$   
 $[(x + y)^2 - (x - y)^2] / (x * y)$

**TRÍCH ĐÁP ÁN ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2011**

**Bài 1.**

- a)  $\exists C > 0, \exists d \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq m \Rightarrow |T(n)| < C n^d)$ .
- b)  $\forall C > 0, \forall d \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} (n \geq m \wedge |T(n)| \geq C n^d)$ .

**Bài 2.**

ĐS: 42580

**Bài 3.**

a) ĐS:

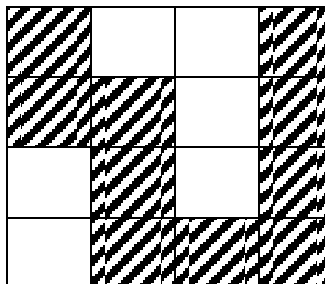
$$a_n = c 3^n + dn 3^n .$$

b)ĐS:

$$a_n = (2 + n)3^n + \frac{n^2}{2} (n + 3) 3^n .$$

**Bài 4.**

a) Biểu đồ Karnaugh của  $f$  gồm các ô gạch chéo



Suy ra biểu đồ Karnaugh của  $\bar{f}$  gồm các ô trắng.

b)Dạng nổi rời chính tắc ( dạng tuyển chuẩn tắc) của  $\bar{f}$ .

August 28, 2011

$$\bar{f} = x \bar{y} \bar{z} t \vee x \bar{y} \bar{z} \bar{t} \vee x y z \bar{t} \vee \bar{x} y z \bar{t} \vee \bar{x} y z t \vee \bar{x} y \bar{z} t$$

**Bài 5.**

a)

$s$	$x$	$y$	$z$	$t$
$0^*$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
-	$(10, s)$	$(5, s)^*$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
-	$(8, y)$	-	$(14, y)$	$(7, y)^*$
-	$(8, y)^*$	-	$(13, t)$	-
-	-	-	$(9, x)^*$	-

$d(s, x) = 8$ . Đường đi :  $syx$

$d(s, y) = 5$ . Đường đi:  $sy$

$d(s, z) = 9$ . Đường đi:  $syxz$

$d(s, t) = 7$ . Đường đi:  $syt$

b) Tương tự ta được bảng sau với đồ thị mới

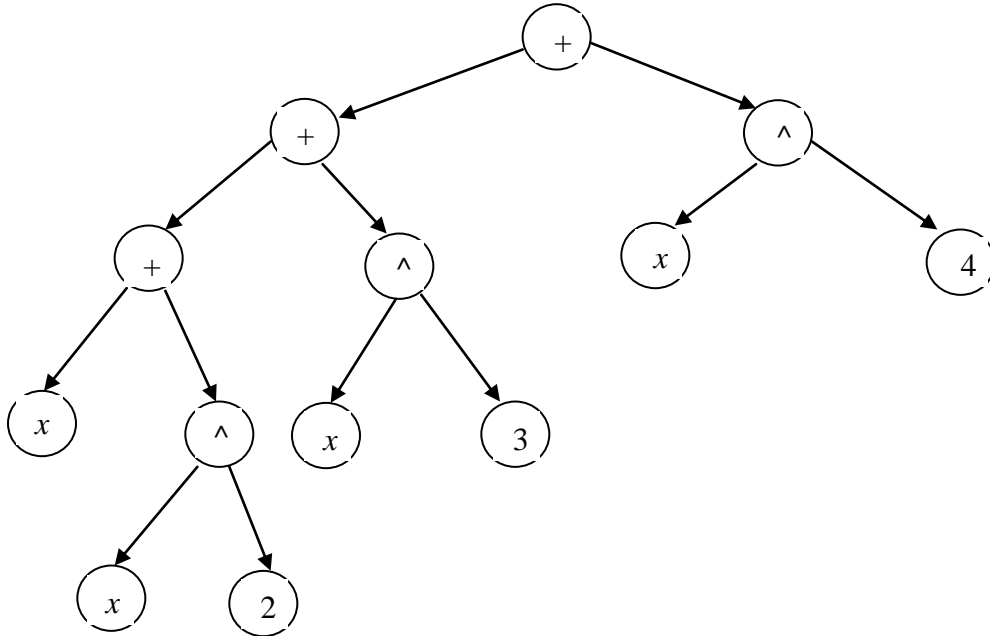
$s$	$x$	$y$	$z$	$t$
$0^*$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
-	$(10, s)$	$(5, s)^*$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
-	$(2, y)^*$	-	$(14, y)$	$(7, y)$
-	-	-	$(3, x)^*$	$(7, y)$
-	-	-	-	$(7, y)^*$

Tuy nhiên kết quả bây giờ không phải là đường đi ngắn nhất. Chẳng hạn trong cột  $y$  ta được đường đi  $sy$  với chiều dài 5. Tuy nhiên đường đi  $syxy$  có chiều dài là  $5 - 3 + 2 = 4 < 5$ .

**Bài 6.**

August 28, 2011

a) Vẽ cây biểu diễn của biểu thức



b) Duyệt cây theo tiền thứ tự ta được biểu thức theo ký pháp Ba Lan:

$$+++x^x2^x3^x4.$$